绝密★启用前

2020 年全国硕士研究生招生考试

数学(二)试题

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶是 【 】

(A) $\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$. (B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$.

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$. (D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 【 】

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(3) $\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$ 【 】

(A) $\dfrac{\pi^2}{4}$. (B) $\dfrac{\pi^2}{8}$. (C) $\dfrac{\pi}{4}$. (D) $\dfrac{\pi}{8}$.

(4) 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$,当 $n \geqslant 3$ 时,$f^{(n)}(0)=$ 【 】

(A) $-\dfrac{n!}{n-2}$. (B) $\dfrac{n!}{n-2}$. (C) $-\dfrac{(n-2)!}{n}$. (D) $\dfrac{(n-2)!}{n}$.

(5) 关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy \neq 0 \\ x, & y=0 \\ y, & x=0 \end{cases}$ 给出以下结论

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$ ② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)}=1$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$

正确的个数是 【 】

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

(6) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导,且 $f'(x)>f(x)>0$,则 【 】

(A) $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$. (B) $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$.

(C) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} < e^2$.　　　　(D) $\dfrac{f(2)}{f(-1)} < e^3$.

(7) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 通解为　【　】

(A) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(B) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(C) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(D) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值为 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为　【　】

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.　　　　(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(C) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.　　　　(D) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\end{cases}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ____________.

(10) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,dx=$ ____________.

(11) 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $dz\big|_{(0,\pi)}=$ ____________.

(12) 斜边长为 $2a$ 等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，设重力加速度为 g，水密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为____________.

(13) 设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0$，$y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=$ ____________.

(14) 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$ ____________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$,并求曲线 $y=f(x)$,$y=\frac{1}{2}$,$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

(19)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=1$,$x=2$,$y=x$ 与 x 轴围成,计算 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(Ⅰ)证明:存在 $\xi\in(1,2)$,$f(\xi)=(2-\xi)\mathrm{e}^{\xi^2}$;

(Ⅱ)证明:存在 $\eta\in(1,2)$,$f(2)=\ln 2\cdot\eta\mathrm{e}^{\eta^2}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 可导,且 $f'(x)>0$,曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 经过坐标原点 O,其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T,又 MP 垂直 x 轴于点 P. 已知由曲线 $y=f(x)$,直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 $\triangle MTP$ 的面积之比恒为 $3:2$,求满足上述条件的曲线的方程.

(22)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ 得 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

2020 年全国硕士研究生招生考试数学(二)真题点评

答案速查

一、选择题

(1) D　(2) C　(3) A　(4) A　(5) B　(6) B　(7) C　(8) D

二、填空题

(9) $-\sqrt{2}$　(10) $\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$　(11) $(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　(12) $\frac{1}{3}\rho g a^3$　(13) 1　(14) $a^2(a^2-4)$

三、解答题

(15) $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-1}$

(16) $g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}$

证明略

(17) 函数有极小值 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$

(18) $V_x=\frac{\pi^2}{6}$

(19) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{4}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$

(20) 略

(21) $y=Cx^3(C\in R$ 且 $C>0)$

(22) (Ⅰ) $a=-\frac{1}{2}$

(Ⅱ) $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(23) (Ⅰ) 略

(Ⅱ) 是

测评结果

题型 / 测评项目	选择题 1 ～ 8	填空题 9 ～ 14	解答题 15 ～ 19	解答题 20 ～ 21	解答题 22 ～ 23	合计
建议用时	30 分钟	25 分钟	75 分钟	25 分钟	25 分钟	180 分钟
实际用时						
得分						

试卷评析

考点分布表一（高等数学部分）

考　点	极限与连续	一元微分学	一元积分学	多元微分学	二重积分	常微分方程
分　数	16	39	19	18	14	10

考点分布表二（线性代数部分）

考　点	行列式	矩阵	向量	方程组	特征值与特征向量	二次型
分　数	0	19	0	6	4	5

2020 年数学(二)的试卷延续了往年的命题方式，其难度相当。考点都是来自基本概念、基本理论和基本运算，这提醒广大考生要注重基础知识的学习；总体来看 2020 年的试卷综合性增强了。

高等数学部分，18 个题，共 116 分。这些题都是常考题型，应用题难度略有降低。如果考生平时复习时注意基础知识的全面复习，不会失分太多。今年试题的一大特点是加强了综合性题目，如：(13) 题、(16) 题、(18) 题和(21) 题。

线性代数部分 5 道题，共 34 分，占总分的 22%。知识点的考查覆盖面较以往更广，计算量不大，思路考查为主.(7) 主要考查了伴随矩阵的秩，齐次线性方程组的基础解系，是基础考点.(8) 主要考查了特征值和特征向量的基本概念和性质.(14) 主要考查了四阶数字型行列式的计算，是基本题目.(21) 主要考查了矩阵可逆性的判别，矩阵的间接相似对角化，是考研数学的重点题型.(22) 二次型的非退化线性替换，实对称矩阵的合同.

试题详解

一、选择题

(1) D

【考点定位】无穷小比较,变上限积分求导.

【思路探索】判断题中四个选项分别是 x 的多少阶无穷小,并对阶数进行比较.

解 $x\to 0^{+}$ 时,

(A) $\left[\int_0^x (e^{t^2}-1)dt\right]'=e^{x^2}-1\sim x^2$

$\therefore\int_0^x (e^{t^2}-1)dt$ 是 x 的 3 阶无穷小.

(B) $\left[\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt\right]'=\ln(1+\sqrt{x^3})\sim x^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt$ 是 x 的$\frac{5}{2}$阶无穷小.

(C) $\left[\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt\right]'=\sin(\sin^2 x)\cdot\cos x\sim x^2$

$\therefore\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$ 是 x 的 3 阶无穷小.

(D) $\left[\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt\right]'=(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}\sin x\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}x^4$

$\therefore\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$ 是 x 的 5 阶无穷小.

故应选(D).

阅卷人说

① 本题是经典题型;

② 由 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=C(\neq 0)$ 可得 $f'(x)$ 是 x 的 $\alpha-1$ 阶无穷小,$f(x)$ 是 x 的 α 阶无穷小;

③ 本题若采用两两比较,运算量较大.

(2) C

【考点定位】间断点及其分类.

【思路探索】先求出函数的间断点,然后再由 x 趋于各间断点时的极限即可得结果.

解 间断点为:$x=-1,x=0,x=1,x=2$

由 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln|1+x|}{(x-2)(e^x-1)}=\infty$ 知 $x=-1$ 是第二类间断点;

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln|x+1|}{(x-2)(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln|x+1|}{(x-2)\cdot x}=-\frac{e^{-1}}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=-\frac{1}{2e}$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点;

因为$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}=0$ 而$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点；

同理由$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(x+1)}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$ 知 $x=2$ 也是 $f(x)$ 的第二类间断点.故应选(C).

错例分析 有同学选择 B，其根据是$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}=0$，由此便得 $x=1$ 不是第二类间断点，显然是没有搞清楚间断点的定义，再者就是指数函数 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 在间断点 $x=1$ 处其右极限是不存在.

阅卷人说》》》

① 考生应熟练掌握求间断点的方法；

② 间断点 x_0 类型的判别是根据$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的结果来决定的；

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=c$（$c$ 为常数），则 x_0 为第一类可去间断点；

若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$均存在但不相等，则 x_0 为第一类跳跃间断点；

其他的间断点为第二类间断点.

(3) A

【考点定位】广义积分，换元法与分部积分法.

【思路探索】先换元令 $t=\sqrt{x}$，再分部积分即可.

解 由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=1$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}=\infty$

所以 $x=0$ 是可去间断点；$x=1$ 是无穷间断点.故$\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ 是广义积分

令：$t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2t\cdot dt$

$\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_0^1\dfrac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\int_0^1\arcsin t\cdot d(\arcsin t)=(\arcsin t)^2\Big|_0^1=\dfrac{\pi^2}{4}$，故应选(A).

错例分析 本题是无界函数的广义积分，如果没有说明 $x=1$ 是瑕点从数学概念的严密性上讲是会扣分的.

阅卷人说》》》

① 广义积分分为两类：无穷限广义积分与瑕积分；

② 当广义积分收敛时，广义积分的换元法与分部积分法与定积分的相应方法是相同的，不同点在于广义积分计算出被积函数的原函数后不能直接代入广义积分的上（或下）限，而是需要求极限.

（4）A

【考点定位】高阶导数.

【思路探索】直接利用求高阶导数的公式.

解 因为$[\ln(1-x)]^{(n)}=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}$，$[\ln(1-x)]^{(n-1)}=-\dfrac{(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}$

$$[\ln(1-x)]^{(n-2)}=-\frac{(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}$$

$(x^2)'=2x$，$(x^2)''=2$，$(x^2)^{(3)}=0$ 所以根据莱布尼茨公式得

$$f^{(n)}(x)=[x^2\cdot\ln(1-x)]^{(n)}=C_n^0x^2\cdot[\ln(1-x)]^{(n)}+C_n^1(x^2)'\cdot[\ln(1-x)]^{(n-1)}+C_n^2(x^2)''\cdot[\ln(1-x)]^{(n-2)}$$

$$=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}x^2-\frac{2(n-2)!\,n}{(1-x)^{n-1}}x+2\cdot\frac{n!}{2(n-2)!}\frac{-(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}$$

$$=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}x^2-\frac{2n(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}x-\frac{n!}{n-2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-2}}(n\geqslant 3)$$

显然有：$f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2}$，故应选(A).

错例分析 从阅卷情况看本题采用逐阶求导从而找出规律得到 $f^{(n)}(x)$ 的表达式后再求出 $f^{(n)}(0)$ 的值出错率很高；原因是 $f^{(n)}(x)$ 的表达式不易求得. 本题利用莱布尼茨公式比较简单，因为 x^2 的三阶导数为零.

阅卷人说》》

求高阶导数，一般思路是对函数 $f(x)$ 逐阶求导，找出各阶导数表达式的规律，从而写出 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 的表达式；若 $f(x)$ 可以看作两个函数的乘积，则直接利用莱布尼茨公式求高阶导数即可；特别是其中一个函数的 k 阶导数为零($k=2$ 或 $k=3$) 时应用公式求 n 阶导数更简单. 如本题.

（5）B

【考点定位】多元函数二次极限，二重极限以及偏导数的计算.

【思路探索】由题设条件及多元函数相应概念的含义分别求出二次极限、二重极限及一阶、二阶偏导数值即可.

解 ① 由定义知$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1$

② 当 $xy\neq 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=y$，当 $x=0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$，当 $y=0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=1$

而$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-1}{y}=\infty$，不存在

③ 当 $xy \neq 0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$，

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$，

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$，

所以得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ 成立

④ 当 $xy \neq 0$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} xy = \lim\limits_{y\to 0} y \cdot \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

当 $y=0$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{y\to 0} y = 0$

综上知：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ 正确，即共有 3 个正确结论，故应选(B).

阅卷人说》》

考生在复习过程中务必要注意多元函数的极限、连续、偏导数存在、可微等概念之间的关系，以及这些概念与一元函数相应概念之间关系的异同，特别是不同之处一定要搞清楚并能举例说明.

(6) B

【考点定位】函数的单调性.

【思路探索】根据已知条件构造辅助函数 $g(x) = \ln f(x) - x$ 利用 $g'(x)$ 的符号得 $g(x)$ 的单调性即可得结论.

解 由题设条件：$f'(x) > f(x) > 0, x \in [-2,2]$ 知 $\dfrac{f'(x)}{f(x)} > 1$ 即 $\dfrac{f'(x)}{f(x)} - 1 > 0$，于是

令：$g(x) = \ln f(x) - x$，则 $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} - 1 > 0$，从而知 $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上严格单调增加，因此得 $g(-1) = \ln f(-1) + 1 < g(0) = \ln f(0)$

即 $\ln f(0) - \ln f(-1) = \ln \dfrac{f(0)}{f(-1)} > 1$. 故 $\dfrac{f(0)}{f(-1)} > \mathrm{e}$，所以选项(B) 成立；

由 $g(-2) < g(-1)$ 得 $\ln f(-2) + 2 < \ln f(-1) + 1$ 即 $\ln \dfrac{f(-2)}{f(-1)} < -1$，故 $\dfrac{f(-2)}{f(-1)} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，因此选项(A) 不成立；同理知选项(C) 和(D) 也不成立，故应选(B).

阅卷人说》》

本题属于基本题型，主要考查的是利用导数符号判断函数的单调性，即导数应用的内容之一. 导数应用这部分内容考生必须掌握，是每年考研的必考知识.

(7) C

【考点定位】伴随矩阵的秩,齐次线性方程组的基础解系.

【思路探索】根据秩的定义,得到 $\boldsymbol{A}$ 的秩,进而得到伴随矩阵的秩,再得到基础解系.

解 由于 $A_{12} \neq 0, r(\boldsymbol{A})=3$,所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,成基础解系.由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}A_{11}\\A_{12}\\A_{13}\\A_{14}\end{bmatrix}=0$$

可知,$A_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+A_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+A_{13}\boldsymbol{\alpha}_3+A_{14}\boldsymbol{\alpha}_4=0$,因为 $A_{12}\neq 0$,因此 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为基础解系,故应选(C).

又因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{A}$ 的每一列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*x=0$ 的解向量.只要找到是 $\boldsymbol{A}^*x=0$ 的 3 个无关解就构成基础解系.

阅卷人说

伴随矩阵是考研中基础且重要的考点.大家务必掌握以下常用结论:

①$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$; ②$(k\boldsymbol{A}^*)=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*\ (n\geqslant 2)$;

③$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$; ④$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$;

⑤ 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,亦即 $\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*$,$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}$;

⑥ $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\quad(n\geqslant 2)$; ⑦$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$;

⑧$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n & 若\ r(\boldsymbol{A})=n\\1 & 若\ r(\boldsymbol{A})=n-1\\0 & 若\ r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$

(8) D

【考点定位】特征值和特征向量的基本概念和性质.

【思路探索】根据特征值和特征向量的定义可得.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为属于特征值 1 的线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍为属于特征值 1 的线性无关的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量,故 $-\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量矩阵,因为特征向量与特征值的排序一一对应,故只需 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 就有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$,故应选(D).

阅卷人说》》

特征值和特征向量是考研数学的重点．请大家熟练掌握定义和下列结论：

	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^m$	$f(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\boldsymbol{A}^i$	$\boldsymbol{A}^T$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$f(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\lambda^i$	λ	λ^{-1}	$\dfrac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda},\lambda\neq 0$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	不确定	ξ	ξ	$\boldsymbol{P}^{-1}\xi$

二、填空题

(9) $-\sqrt{2}$

【考点定位】 参数方程确定函数的二阶导数．

【思路探索】 利用参数方程的二阶导数公式计算．

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{t}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}=\frac{-\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

$\therefore \left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$．故应填 $-\sqrt{2}$．

阅卷人说》》

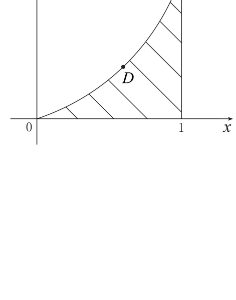
本题知识点清晰，计算量不大，是一道送分题．

(10) $\dfrac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$

【考点定位】 二次积分的计算．

【思路探索】 直接计算已知二次积分不易求得结果，因此可由题目所给条件画出积分域的草图，再交换积分次序并进行计算便可得结果．

解 积分区域 D 如图所示



$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\ \sqrt{y}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\text{或 } D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x^2\end{cases}$$

交换二次积分的积分次序得

$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\,dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}\,dy=\int_0^1\sqrt{x^3+1}\,dx\int_0^{x^2}dy$$

$$=\int_0^1\sqrt{x^3+1}\cdot y\Big|_0^{x^2}dx=\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\cdot d(1+x^3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

故应填$\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$.

阅卷人说》》》

直接计算已知二次积分的值一般比较困难，通常情况下是交换积分次序后再求其值，具体方法为：

① 由已知二次积分的上、下限写出 x,y 满足的不等式，

② 由不等式组画出积分区域 D 的示意图，

③ 根据 D 的示意图(上、下、左、右边界) 写出新的二次积分并求出其值(如本题).

(11) $(\pi-1)dx-dy$

【考点定位】全微分.

【思路探索】先求出函数 z 的两个一阶偏导数，再代入全微分公式.

解 $\because$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\cdot[y+\cos(x+y)]$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\cdot[x+\cos(x+y)]$

$\therefore$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=\pi-1,\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=-1$

由全微分公式得 $dz\Big|_{(0,\pi)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}\cdot dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}\cdot dy=(\pi-1)dx-dy$.

故应填$(\pi-1)dx-dy$.

阅卷人说》》》

本题是基本题不难，考生必须掌握这类题目的计算方法.

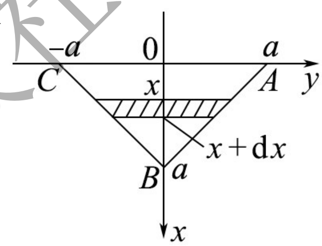
① 全微分公式 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

② 若函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{Fx}{Fz},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{Fy}{Fz}$

（12）$\frac{1}{3}\rho g a^3$

【考点定位】定积分的物理应用之一求水压力.

【思路探索】先建立坐标系并选定积分变量及其变化范围，再确定压力微元 $\mathrm{d}F$，最后对 $\mathrm{d}F$ 积分即可.



解 如图建立坐标系，则直线 AB 的方程为 $y=a-x, x\in[0,a]$

$\forall[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,a]$ 上平板一侧所受的水压力微元为 $\mathrm{d}F$ 且

$$\mathrm{d}F=2\rho g x(a-x)\cdot \mathrm{d}x$$

所以 $F=\int_0^a \mathrm{d}F=\int_0^a 2\rho g x(a-x)\mathrm{d}x=2\rho g\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x$

$$=2\rho g\left(\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{1}{3}\rho g a^3$$

故应填 $\frac{1}{3}\rho g a^3$.

阅卷人说》》》

对于物理学中的实际问题，定积分的微元法提供了一个解决问题的良好途径. 在使用微元法时，选取积分变量 x 与积分区间 $[a,b]$ 以及寻求所求量 u 的积分微元 $\mathrm{d}u=f(x)\mathrm{d}x$ 的表达式是最为关键的两点；特别是在确定积分微元 $\mathrm{d}u$ 的表达式时一般情况下都有近似. 如本题是用点 x 处的压强近似代替图中阴影部分其他点处的压强，用小矩形的面积 $2(a-x)\cdot\mathrm{d}x$ 近似代替图中阴影部分的面积，这样才求出平板一侧在水深 x 处所受压力 $\mathrm{d}F=2\rho g x(a-x)\mathrm{d}x$. 其他如求引力、弧长、体积等都是如此.

（13）1

【考点定位】二阶常系数齐次线性微分方程求特解；无穷限广义积分的计算.

【思路探索】先求出二阶线性微分方程的特解 $y(x)$；再计算广义积分即可.

解 由条件知，特征方程为：$r^2+2r+1=0$，特征值 $r_1=r_2=-1$

齐次方程通解为：$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$，

由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得 $C_1=0, C_2=1$

即 $y(x)=x\mathrm{e}^{-x}$，从而知：

$$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-(x\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-(x\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}+0-\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}+1=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}+1=1$$

故应填 1.

阅卷人说》》》

本题属基本综合题不难，考生务必要掌握其解法.

（1）对于二阶常系数齐次线性微分方程求解的方法教材叙述的非常清楚且不难，这里不再重述.

（2）对于无穷限广义积分一般地有：

① $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$

当 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 存在时，广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则，发散.

② 当 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 为奇函数},\\ 2\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 为偶函数}.\end{cases}$

考生需特别注意，如果广义积分发散或敛散性未知时，则绝不能用被积函数的奇偶性来简化运算. 比如，求广义积分：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$

错解：因为 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 为奇函数，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=0$.

本题的错误在于 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 发散，因此不能利用对称性定理.

事实上：$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$

故广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

（14）$a^2(a^2-4)$

【考点定位】 四阶数字型行列式的计算.

【思路探索】 利用每列元素之和相等的规律，先求和，提出公共因子，再进一步计算.

解 原式 $=a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&1&-1\\0&2&a+1&1\\0&0&a&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&1&-1\\2&a+1&1\\0&a&a\end{vmatrix}$

$$=a^2\begin{vmatrix}a&2&-1\\2&a&1\\0&0&1\end{vmatrix}=a^2(a^2-4)$$

故应填 $a^2(a^2-4)$.

阅卷人说》》》

对于数字型行列式，每行元素之和相等或者每列元素之和相等，是考研中的热点，但是也是基础题型.

三、解答题

(15)**【考点定位】**渐近线.

【思路探索】直接利用斜渐近线方程公式进行计算即可.

解 设所要求斜渐近线方程为：$y=ax+b$，则

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1+x}}{x(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to+\infty}[y(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[\frac{x^x}{(1+x)^x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[\mathrm{e}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x-1\right]=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left\{\mathrm{e}^{\ln\left[\mathrm{e}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right]}-1\right\}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\mathrm{e}^{\ln\mathrm{e}+x\cdot\ln\frac{x}{1+x}}-1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln\frac{x}{1+x}+1}-1\right)\\&\overset{*}{=}\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(x\cdot\ln\frac{x}{1+x}+1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\xlongequal{\text{令 }t=\frac{1}{x}}\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{t}\ln\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}+1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t+1}+1\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\frac{t-\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\\&=\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\end{aligned}$$

即斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x+\frac{1}{2\mathrm{e}}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-1}$.

错例分析 本题得分较低，主要错误是 b 求得不对，还有的考生根本就没求出 b 的值.本题在求极限时用到了多个知识点.如带 * 号的那一步就利用了等价无穷小代换：$\mathrm{e}^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$ 其中 $\lim\varphi(x)=0$；该题中 $\varphi(x)=x\cdot\ln\frac{x}{1+x}+1$ 且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\ln\frac{x}{1+x}+1\right)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\frac{x}{1+x}=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-\ln(1+x)}{\frac{1}{x}}=1-1=0$；还有的考生粗心大意，把渐近线方程写成$\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-1}$，漏掉“$y=$”.

阅卷人说>>>

渐近线的定义：

① 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线（将 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 仍有此定义）.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线（将 $x\to x_0^-$ 改为 $x\to x_0^+$ 仍有此定义）.

③ 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a(a\neq0)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$，则称直线 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线（将 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 仍有此定义）.

另外考生应注意从定义可知：求渐近线时必须用单侧极限.

(16)【考点定位】等价无穷小定义,导数定义,变限积分求导及连续函数的概念.

【思路探索】先求出 $g'(x)$ 的表达式,再利用连续函数的定义证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 由题设条件:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

且 $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u=xt} \int_0^x f(u)\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

当 $x=0$ 时,$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

当 $x\neq 0$ 时,$g'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right)'=\dfrac{f(x)\cdot x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

即 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

阅卷人说》》》

本题是一道综合题,考查了等价无穷小的定义,函数连续及导数的概念,同时也考查了变限定积分求导的方法,这些知识点都是特别重要的,请考生务必注意.

(17)【考点定位】二元函数无条件极值.

【思路探索】先求函数的驻点,再求极值.

解 令 $\begin{cases}f'_x=3x^2-y=0\\ f'_y=24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{6},\\ y=\dfrac{1}{12}.\end{cases}$

又 $f''_{xx}=6x,f''_{xy}=-1,f''_{yy}=48y$.

在(0,0)处，$A=0,B=-1,C=0,AC-B^2<0$，不取极值；

在$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$处，$A=1,B=-1,C=4,AC-B^2>0,A>0$.

∴ 函数有极小值 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

阅卷人说》》》

本题属于基础题，难度较小，计算较易，知识点单一，直来直去. 考生务必做好基础题，这是保分的.

(18)**【考点定位】**方程组求解；旋转体体积的计算.

【思路探索】先根据已知条件通过解方程组求出 $f(x)$；再利用微元法求旋转体的体积.

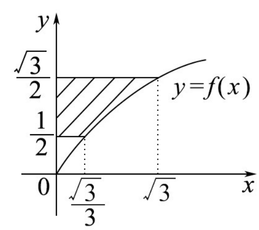
解 由已知等式 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ 得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x\cdot\sqrt{1+x^2}},\text{即 }2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{x+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

从而知 $f(x)$ 满足方程组 $\begin{cases}2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}\\ f(x)+2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^2+x}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$

解得 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (x>0)$

由曲线 $y=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，直线 $y=\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形的示意图为：



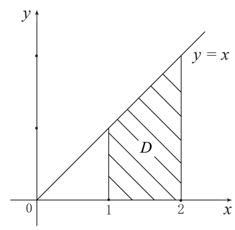
于是所求体积为：
$$V_x=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt{3}-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{3}-\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\pi f^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi-\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi-\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi-\pi x\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}+\pi\cdot\arctan x\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi-\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

阅卷人说

本题涉及到由题设条件构造一个含待定函数 $f(x)$ 的方程组及求旋转体的体积等多个知识点，这种综合题不难且在往年考研题中多次出现，如2009年(17)题；2012年(17)题. 考生要熟练掌握平面图形的面积公式以及旋转体的体积公式(要分清是绕 x 轴旋转还是绕 y 轴旋转).

(19)**【考点定位】**二重积分的计算.

【思路探索】直接将二重积分化为二次积分进行计算即可.



解 积分区域 D 如图所示

解法一：从积分区域 D 的形状考虑，采用直角坐标系计算二重积分，

且 $D: 0 \leqslant y \leqslant x, 1 \leqslant x \leqslant 2$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{令 } y = x \cdot \tan t} \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sec t \cdot x \cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 x\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 \cdot \frac{1}{2}(\sec t \cdot \tan t + \ln|\sec t + \tan t|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]$$

解法二：从被积函数的构成考虑采用极坐标系计算二重积分，且 $D: 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\cos\theta} \leqslant \gamma \leqslant \frac{2}{\cos\theta}$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{\gamma}{\gamma \cdot \cos\theta}\gamma\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \gamma\,\mathrm{d}\gamma$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta\ \frac{1}{2}\gamma^2\Big|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}(\sec\theta \cdot \tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]$$

错例分析 本题的主要问题是有部分考生没有计算出二次积分的结果，原因是积分不熟练，希望考生多作一些不定积分的题目.

阅卷人说》》

二重积分的计算坐标系的选择是关键，一般应从两个方面考虑：一个是积分区域 D 的形状，另一个是被积函数 $f(x,y)$ 的构成. 当 D 是由直线、抛物线、双曲线所围成时，通常选择直角坐标系计算二重积分；而当 D 是圆域或圆域的部分区域，且被积函数 $f(x,y)$ 表达式中含有 (x^2+y^2) 的形式时，优先选择极坐标系计算二重积分.

本题选择直角坐标系与选择极坐标系进行计算其难易度相当. 但有些二重积分的计算难易度与坐标系的选择以及积分次序得选择是有直接关系的；有时选择不恰当就无法求出二重积分的值.

(20)**【考点定位】**微分中值定理的应用.

【思路探索】(Ⅰ) 根据题设条件构造辅助函数 $F(x)=(x-2)f(x)$，对 $F(x)$ 在闭区间$[1,2]$上利用罗尔定理即可；(Ⅱ) 取 $g(x)=\ln x$，对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间$[1,2]$上由柯西定理便可得结果.

证 (Ⅰ) 由题目所给条件及要证的结论构造函数 $F(x)$ 为

$$F(x)=(x-2)\cdot f(x)=(x-2)\cdot\int_1^x e^{t^2}\,dt$$

则 $F(1)=0, F(2)=0, F'(x)=f(x)+(x-2)e^{x^2}$

由罗尔定理知，在开区间 $(1,2)$ 内存在 ξ 使 $F'(\xi)=0$

即 $F'(\xi)=f(\xi)+(\xi-2)e^{\xi^2}=0$

故有 $f(x)=(2-\xi)e^{\xi^2}, \xi\in(1,2)$.

(Ⅱ) 取 $g(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间$[1,2]$上满足柯西定理的条件，因此必存在 $\eta\in(1,2)$，使下式成立，

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

即 $\dfrac{f(2)-0}{\ln 2-0}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\dfrac{1}{\eta}}=\eta e^{\eta^2}$，

故有 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}, \eta\in(1,2)$ 成立.

阅卷人说》》

请考生注意：使用微分中值定理的两个要素. 一是根据题目所给条件及要证结论构造合适的辅助函数，这是难点；二是要确定恰当的区间，两者缺一不可. 考查微分中值定理的应用在考研题目中经常出现. 如2010年(21)题、2013年(18)题、2020年(20)题等.

(21)**【考点定位】**导数的几何意义；定积分的几何应用；微分方程求解.

【思路探索】先求出过点 $M(x,y)$ 的切线方程；再利用定积分的几何意义求出曲边梯形（即由曲线 $y=f(x)$，直线 MP 以及 x 轴所围图形）的面积 $S_1(x)$ 及 $\triangle MPT$ 的面积 $S_2(x)$，由 $\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}=\dfrac{3}{2}$ 可得一个含有 $y=f(x)$ 的方程；最后解方程即可得结论.

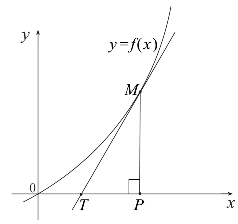
解 设切点 M 的坐标为 (x,y)，则点 P 的坐标为 $(x,0)$；过点 $M(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)\text{，即 }Y=y+y'(X-x)$$

令 $Y=0$ 得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，从而知点 T 的坐标为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$

$\triangle MTP$ 的面积 $S_2(x)=\dfrac{1}{2}\left[x-\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right]\cdot y=\dfrac{y^2}{2y'}$

根据定积分的几何意义知：由曲线 $y=f(x)$ 直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积 $S_2(x)$ 为



$$S_2(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{ 如图所示}$$

由题意知 $\dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}=\dfrac{3}{2}$

即 $\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y^2}{y'}}=\dfrac{3}{2}$，整理得 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{y^2}{y'}$

在上述等式两端对 x 求导得 $f(x)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2y\cdot y'\cdot y'-y^2\cdot y''}{(y')^2}$

由 $y=f(x)$ 整理得（其中 $y\neq 0$）

$3yy''-2(y')^2=0$…………①

令 $p=y'$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，$y'=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 代入①式得

$3yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p^2=0$，即 $\dfrac{1}{p}\mathrm{d}p=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{y}\mathrm{d}y(y\neq 0,p\neq 0)$

解得 $p=C_1y^{\frac{2}{3}}$，$C_1\in R$，

又 $p=y'$，因此有 $y'=C_1y^{\frac{2}{3}}$，解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y^{\frac{2}{3}}$ 得 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$，$C_2\in R$，

由 $y(0)=0$ 知 $C_2=0$，即 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x$，从而知

$y=\left(\dfrac{C_1}{3}\right)^3x^3=Cx^3$（其中 $C=\dfrac{C_1^3}{27}$）

故所求曲线方程为 $y=f(x)=Cx^3(C\in R\text{ 且 }C>0)$.

阅卷人说》》

本题是一道综合题，考查了多个知识点：求切线方程、变限积分求导、利用定积分求平面图形面积、微积分方程求解等. 这类题目往年也考过，如2005年(16)题.

(22)**【考点定位】**二次型的非退化线性替换，实对称矩阵的合同.

【思路探索】根据变换前后实对称矩阵的合同关系，求得参数 a；再根据两个二次型有相同的惯性指数，求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 （Ⅰ）$f(x_1,x_2,x_3)$ 的二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$，

$g(y_1,y_2,y_3)$ 的二次型矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$，

其中 $r(\boldsymbol{B})=2$，经可逆变换得，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$. 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{vmatrix}=(1+2a)\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=(1+2a)\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 1-a\end{vmatrix}=(1+2a)(1-a)^2=0$$

解得 $a=1, a=-\frac{1}{2}$. 代入 $a=1$ 得 $r(\boldsymbol{A})=1$ 舍去. 所以 $a=-\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）$f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$，

令 $\begin{cases}z_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_3)\\ z_3=x_3\end{cases}$，即令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_1x$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$.

由 $g(y_1,y_2,y_3)=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$，

令 $\begin{cases}z_1=y_1+y_2\\ z_2=y_2\\ z_3=2y_3\end{cases}$，即令 $=\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Y}$，则 $f(y_1,y_2,y_3)=z_1^2+z_2^2$. 故 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Y}$，即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{Y}$，所以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$. 其中

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & \frac{2}{3}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3}\sqrt{3}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

错例分析 本题的错误主要集中在解题思路上，前后矩阵是合同关系，而不一定是相似关系. 因此，特征值未必一定相同，但是惯性指数一定相同.

阅卷人说》》

需要大家特别注意的是，二次型经过非退化线性替换，对应的矩阵是合同的关系，而如果经过正交变换，则是相似关系. 实对称矩阵合同的充要条件是特征值正负号相同，相似的充要条件是特征值相同.

(23)**【考点定位】**矩阵可逆性的判别，矩阵的间接相似对角化.

【思路探索】第一问利用列向量的线性无关判别矩阵可逆；第二问利用$\boldsymbol{A}$的相似矩阵，间接判别对角化问题.

解 （Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是$\boldsymbol{A}$的特征向量，则$\boldsymbol{A\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$，即$\boldsymbol{A\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}$线性无关. 所以$r(\boldsymbol{P})=2$，矩阵$\boldsymbol{P}$可逆.

（Ⅱ）设$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

所以$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，即$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)=0$$

得$\lambda_1=-3$. $\lambda_2=2$. 因为$\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$\boldsymbol{B}$可以相似对角化，则$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

阅卷人说》》

1. 矩阵可逆的充要条件有很多，比如行向量线性无关，或者列向量线性无关等等.
2. 矩阵相似是考研数学线代部分的重点和难点. 请考生务必掌握以下结论：
   (1) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，$\boldsymbol{P}$ 可逆.
   (2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似的必要条件有：
   ①$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值、行列式、秩、迹；
   ②$k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m$，$f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T$，$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

人民邮电出版社