**绝密★启用前**

# 2020 年全国硕士研究生招生考试

## 数学(一)试题

**一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.**

(1) 当 $x \to 0^{+}$ 时,下列无穷小量中最高阶是 【　　】

(A) $\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt$.　　(B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\,dt$.

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2\,dt$.　　(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则 【　　】

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

(3) 设函数 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,$f(0,0)=0$,$\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{(0,0)}$ 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 重直,则 【　　】

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{a}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(4) 设 $R$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，$r$ 是实数，则 【 】

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时，$|r| \geqslant R$.

(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时，$|r| \leqslant R$.

(C) 当 $|r| \geqslant R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散.

(D) 当 $|r| \leqslant R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛.

(5) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 【 】

(A) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$.

(B) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{A}$.

(C) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{A}$.

(D) 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解.

(6) 已知直线 $L_1: \dfrac{x - a_2}{a_1} = \dfrac{y - b_2}{b_1} = \dfrac{z - c_2}{c_1}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x - a_3}{a_2} = \dfrac{y - b_3}{b_2} = \dfrac{z - c_3}{c_2}$ 相交于一点，法

向量 $\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}, i = 1,2,3$. 则 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(7) 设 $A, B, C$ 为三个随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) =$

$\dfrac{1}{12}$，则 $A, B, C$ 中恰有一个事件发生的概率为 【 】

(A) $\dfrac{3}{4}$.

(B) $\dfrac{2}{3}$.

(C) $\dfrac{1}{2}$.

(D) $\dfrac{5}{12}$.

(8) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，其中 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \dfrac{1}{2}, \Phi(x)$ 表

示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100} X_i \leqslant 55\right\}$ 的近似值为 【 】

(A) $1 - \Phi(1)$.

(B) $\Phi(1)$.

(C) $1 - \Phi(0.2)$.

(D) $\Phi(0.2)$.

**二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.**

(9) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{\ln(1 + x)}\right] =$ ____________.

(10) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$，$\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=1} =$ ____________.

(11) 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，$f(0)=m$，$f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=$______.

(12) 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$______.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$______.

(14) 设 $X$ 服从区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$______.

**三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

(15)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(16)（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为 $x^2+y^2=2$ 方向为逆时针方向.

(17)（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$.

证明：当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

(18)（本题满分 10 分）

设 $\Sigma$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4)$ 下侧，$f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间$[0,2]$上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$，证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

（Ⅱ）若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\leqslant M$，则 $M=0$.

(20)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$,其中 $a\geqslant b$.

(Ⅰ)求 $a,b$ 值.

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵,$\mathbf{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

(Ⅱ)若 $\mathbf{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$. 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,并判断 $\mathbf{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 $X_1, X_2, X_3$ 相互独立，其中 $X_1$ 与 $X_2$ 均服从标准正态分布，$X_3$ 的概率分布为

$$P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$$

（Ⅰ）求二维随机变量$(X_1, Y)$的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

（Ⅱ）证明随机变量 $Y$ 服从标准正态分布.



(23)（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 $T$ 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 $\theta, m$ 为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t \mid T>s\}$，其中 $s>0, t>0$.

（Ⅱ）任取 $n$ 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，若 $m$ 已知，求 $\theta$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

# 2020 年全国硕士研究生招生考试数学(一)真题点评

## 答案速查

**一、选择题**

(1) D　(2) C　(3) A　(4) A　(5) B　(6) C　(7) D　(8) B

**二、填空题**

(9) $-1$　(10) $-\sqrt{2}$　(11) $n+am$　(12) $4e$　(13) $a^2(a^2-4)$　(14) $\dfrac{2}{\pi}$

**三、解答题**

(15) 函数有极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$　　(16) $I=\pi$

(17) 证明略;$S(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}-2,(-1<x<1)$

(18) $I=\dfrac{14}{3}\pi$

(19) 略

(20) (Ⅰ) $a=4,b=1$　　(Ⅱ) $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\dfrac{4}{5} & -\dfrac{3}{5}\\ -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5}\end{bmatrix}$

(21) (Ⅰ) 略　　(Ⅱ) 是

(22) (Ⅰ) $F(X_1,Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(x_1)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(y) & x_1\geqslant y\\ \dfrac{1}{2}\Phi(x_1)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(x_1) & x_1<y\end{cases}$　　(Ⅱ) 略

(23) (Ⅰ) $P\{T>t\}=e^{-(\frac{t}{\theta})^m}\ (t>0)$　　$P\{T>s+t\mid T>s\}=e^{(\frac{s}{\theta})^m-(\frac{s+t}{\theta})^m}\ (s>0,t>0)$

(Ⅱ) $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}$

## 测评结果

| 题型 / 测评项目 | 选择题 1～8 | 填空题 9～14 | 解答题 15～19 | 解答题 20～21 | 解答题 22～23 | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 建议用时 | 30 分钟 | 25 分钟 | 75 分钟 | 25 分钟 | 25 分钟 | 180 分钟 |
| 实际用时 | | | | | | |
| 得分 | | | | | | |

# 试卷评析

考点分布表一(高等数学部分)

| 考　点 | 极限与连续 | 一元微分学 | 一元积分学 | 解析几何 | 多元微分学 | 多元积分学 | 无穷级数 | 微分方程 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分　数 | 8 | 18 | 4 | 2 | 14 | 20 | 10 | 6 |

考点分布表二(线性代数部分)

| 考　点 | 行列式 | 矩阵 | 向量 | 方程组 | 特征值与特征向量 | 二次型 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分　数 | 0 | 4 | 7 | 8 | 11 | 4 |

考点分布表三(概率论与数理统计部分)

| 考　点 | 事件概率 | 一维随机变量 | 二维随机变量 | 数字特征 | 抽样分布 | 参数估计 | 假设检验 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分　数 | 9 | 4 | 11 | 4 | 0 | 6 | 0 |

高等数学部分13道题,共82分,约占总分的55%;今年的试题紧扣大纲,以考查基本概念、基本理论及基本计算方法为主,难度比2019年的试题大.考点分布较为合理,没有偏题、怪题.(1)是常见、常考题型,比较简单;(2)、(3)题考查导数和可微的定义,得分率较低,概念题是考生最怕的题目;(11)题计算量比较大,里面有一定的侥幸成分,即使不讨论$a$的范围,也能填对答案;(16)及(18)题是两道区别于数学二、三的题,以两道大题考查曲线积分与曲面积分也是今年的一大特点,出乎部分考生的预料;(17)题命题方式中规中矩,与往年类似,无穷级数结合微分方程,属于基本运算;(19)题作为高等数学最后一题,证明较多,且考查微分中值定理,常规命题方式,今年亦是如此。因此考生在复习时要在加强对基本概念的深入理解、基本定理的熟练应用和基本计算方法的练习.

线性代数部分5道题,共34分,占总分的22%。知识点的考查覆盖面较以往更广,而难度适中,以基本题目为主.(5)主要考查了矩阵的初等变换,是基础考点;(6)主要考查了线性方程组的几何应用,连续两年考查了这个知识点;(13)主要考查了四阶数字型行列式的计算,是基本题目;(20)主要考查了二次型的正交变换以及实对称矩阵的相似对角化,是考研数学的难点题型;(21)主要考查了矩阵可逆性的判别,矩阵的间接相似对角化,是考研数学的重点题型.总的来说,计算量不大,主要在于思路的考查.

2020年考研概率论与数理统计部分试题相对常规.从题型方面来看,与往年保持一致,仍是涵盖了选择题、填空题以及解答题这三部分.其中在选择题的部分仍是后两道:7、8题;填空题仍是后一道14题;解答题仍是后两道22、23题.题目设置和分值与往年相同.从考点来看,第7题考查的是概率的性质与公式;第8题是将数字特征与中心极限定理相结合;第14题考查的是随机变量函数的数字特征计算;解答题第22题仍是考查了概率分布(离散、连续的混合情况下计算分布函数),并涉及到了相关性与独立性的判断;第23题是参数估计,考查了点估计中的最大似然估计,后两道分值较高的大题,与历年试题中考点基本一致.由上分析可知,就整体难度而言,今年数学(一)概率论与数理统计部分难度不大,依然没有跳出我们复习的范围,依然是对基本概念、基本方法、基本计算的考查.2020数学(一)中概率论与数理统计部分题目的综合难度为:中等偏易.

## 试题详解

### 一、选择题

(1) D

【考点定位】无穷小比较，变上限积分求导.

【思路探索】判断题中四个选项分别是 $x$ 的多少阶无穷小，并对阶数进行比较.

解 $x \to 0^+$ 时，

(A) $\left[\int_0^x (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t\right]' = \mathrm{e}^{x^2}-1 \sim x^2$

$\therefore \int_0^x (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t$ 是 $x$ 的 3 阶无穷小.

(B) $\left[\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t\right]' = \ln(1+\sqrt{x^3}) \sim x^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t$ 是 $x$ 的$\frac{5}{2}$阶无穷小.

(C) $\left[\int_0^{\sin x} \sin t^2 \mathrm{d}t\right]' = \sin(\sin^2 x)\cdot\cos x \sim x^2$

$\therefore \int_0^{\sin x} \sin t^2 \mathrm{d}t$ 是 $x$ 的 3 阶无穷小.

(D) $\left[\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t\right]' = (1-\cos x)^{\frac{3}{2}}\sin x \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} x^4$

$\therefore \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t$ 是 $x$ 的 5 阶无穷小.

故应选(D).

**阅卷人说》》》**

① 本题是经典题型；

② 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=C(\neq 0)$ 可得 $f'(x)$ 是 $x$ 的 $\alpha-1$ 阶无穷小，$f(x)$ 是 $x$ 的 $\alpha$ 阶无穷小；

③ 本题若采用两两比较，运算量较大.

(2) C

【考点定位】导数的定义.

【思路探索】利用导数的定义，推导极限的存在性.

解 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\therefore f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. 因此有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot 0=0$

故应选(C).

选项(A)和(B)中若 $f(0)\neq 0$,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

选项(D)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}f'(0),x\to 0^+\\-f'(0),x\to 0^-\end{cases}$,若 $f'(0)\neq 0$,则极限不存在.

**阅卷人说》》**

此类题目紧扣定义,并充分结合极限、连续、可导之间的关系

①$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

② 可导 $\Rightarrow$ 连续,不连续 $\Rightarrow$ 不可导.

(3) A

**【考点定位】**可微的定义.

**【思路探索】**根据可微的定义,结合向量点乘、叉乘判断.

**解** $f(x,y)$ 在 0 处可微,则有

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})\\&=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{n}(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xf_x(0,0)+yf_y(0,0)-f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|o(\sqrt{x^2+y^2})|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\end{aligned}$$

故应选(A).

**阅卷人说》》**

本题考查可微的定义,同时涉及向量的点乘和叉乘,处理题目时要紧扣定义.

①$f(x,y)$ 在(0,0)处可微 $\Leftrightarrow f(x,y)-f(0,0)=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})$

② 若非零向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$. $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

(4) A

**【考点定位】**收敛半径.

**【思路探索】**利用收敛半径的定义,求选项收数的收敛半径.

**解** $R$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收半径敛.

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$,进而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}\right|=R^2$

对于幂级数 $\sum\limits_{n\to 1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}\right|=|x|^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right|\cdot\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right|=\frac{|x|^2}{R^2}<1\Rightarrow|x|<R$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为 $R$，$\therefore$ 收敛区间为 $(-R,R)$

$\therefore$ 当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时，有 $|r|=R$ 或 $|r|>R$. 故应选(A).

**阅卷人说》》》**

本题常见错误：$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 收敛半径为 $\sqrt{R}$. 考生处理这类问题，紧扣收敛半径的定义式，细心推算，就不会出错.

(5) B

**【考点定位】**矩阵的初等变换.

**【思路探索】**对矩阵进行一次列变换相当于右乘一个相应的初等矩阵.

**解** $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化成矩阵 $\boldsymbol{B}$，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，使得 $\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}_1^{-1}$，令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BP}$，故应选(B).

**阅卷人说》》》**

**矩阵的初等变换是线性代数的核心内容**. 对矩阵进行一次行/列变换相当于左乘/右乘一个相应的初等矩阵.

二次型的规范形是考研重点。本题涉及到如下考点，请大家掌握：

(1) 规范形中"1"的个数 = 正惯性指数 = 正特征值的个数；

规范形中"−1"的个数 = 负惯性指数 = 负特征值的个数.

(2) 特征值的和 = 矩阵的迹；特征值的乘积 = 矩阵的行列式.

(6) C

**【考点定位】**线性方程组的几何应用.

**【思路探索】**利用两条直线的位置关系，得到方程组的解的情况，进而得到法向量的线性关系.

**解** 令 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}=t$，即

有 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_1$. 由 $L_2$ 方程可得 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_2$

由于两直线相交，即存在 $t$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_3=t\boldsymbol{\alpha}_1+(1-t)\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示. 故应选(C).

**错例分析** 本题出错率比较高,主要在于解题思路,也就是不理解线性方程组和解析几何问题的结合.

**阅卷人说>>>**

与解析几何的结合可以看成线性方程组的一种变形考查,这种题型 2019 年刚刚考查过.请大家掌握以下内容:

① 如果两条直线相交于一点,则对应的方程构成的方程组有唯一解;

② 如果两条直线平行,则对应的方程构成的方程组无解;

③ 如果两条直线重合,则对应的方程构成的方程组有无穷解.

(7) D

**【考点定位】** 随机事件的关系与概率运算.

**【思路探索】** 分别计算 $A,B,C$ 三个事件中,某个事件发生另外两个不发生的概率,再求和.

**解**

$$P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$$

$$=P(A\cap(\overline{B\cup C}))+P(B\cap(\overline{A\cup C}))+P(C\cap(\overline{A\cup B}))$$

$$=P(A)-P(A\cap(B\cup C))+P(B)-P(B\cap(A\cup C))+P(C)-P(C\cap(A\cup B))$$

$$=[P(A)-P(AB\cup AC)]+[P(B)-P(BA\cup BC)]+[P(C)-P(CA\cup CB)]$$

$$=[P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)]+[P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)]+[P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$

$$=\left[\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0\right]+\left[\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0\right]$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$=\frac{5}{12}$$

故应选(D).

**阅卷人说>>>**

本题为随机事件概率计算的基本题型,考生应从问题出发,分析出 $A,B,C$ 中恰有一个事件发生包含着 $P(A\bar{B}\bar{C})$,$P(B\bar{A}\bar{C})$,$P(C\bar{B}\bar{A})$ 三种情况,利用概率计算公式 $P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$,$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 分别计算出三种情况的概率,再求和即可求解.

(8) B

**【考点定位】** 数学期望和方差的计算,中心极限定理.

【思路探索】计算 $\sum_{i=1}^{100} X_i$ 的数学期望和方差，再利用中心极限定理.

解 $\because P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$

$\therefore X$ 服从 0－1 分布，其中 $p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$

$\therefore E(X)=\frac{1}{2}, D(X)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

又 $\because X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本

$$\begin{aligned}\therefore E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) &= E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{100}) \\ &= 100 \cdot E(X) \\ &= 100\times\frac{1}{2} \\ &= 50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) &= D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_{100}) \\ &= 100 \cdot D(X) \\ &= 100\times\frac{1}{4} \\ &= 25\end{aligned}$$

由中心极限定理有

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50,25)$$

$$\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leqslant 55\right\}=P\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)-50}{5} \leqslant \frac{55-50}{5}\right\}=P\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)-50}{5} \leqslant 1\right\}=\Phi(1)$$

故应选(B).

**阅卷人说》》**

本题是一道综合题，将数学期望，方差的计算与中心极限定理进行结合，考核了独立同分布随机变量和的期望与方差计算方法，考核了中心极限定理，此题最后进行概率计算时，还考核了如何将普通正态分布转换到标准正态分布. 值得考生注意的是：综合题的不同解题步骤之间紧密关联，第一步期望与方差的计算结果是否正确，严重影响着后一步中心极限定理的计算.

## 二、填空题

(9) $-1$

**【考点定位】**$\infty-\infty$ 型极限.

**【思路探索】**统分化差为积商,再利用等价无穷小替换和洛必达法则.

**解** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(e^x-1)}{(e^x-1)\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-e^x}{2}=-1.$$

故应填 $-1$.

**阅卷人说>>>**

本题难度较小,思路清晰,计算较易.

① 洛必达法则可解决七种未定型极限:

$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty\cdot 0,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$. 前四种相对交易,后三种运算量大.

② 本题也可用泰勒公式计算:$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+0(x^2)$. $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+0(x^2)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{2}x^2+0(x^2)\right]-\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+0(x^2)\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+0(x^2)}{x^2}=-1.$$

(10) $-\sqrt{2}$

**【考点定位】**参数方程确定函数的二阶导数.

**【思路探索】**利用参数方程的二阶导数公式计算.

**解** $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}},\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}},\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{t}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}=\frac{-\sqrt{t^2+1}}{t^3}.$$

$\therefore \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$. 故应填 $-\sqrt{2}$.

**阅卷人说>>>**

本题知识点清晰,计算量不大,是一道送分题.

(11) $n+am$

**【考点定位】** 二阶线性常系数齐次方程,反常积分.

**【思路探索】** 先求方程的通解以及一阶导数的极限,再求反常积分.

**解** 微分方程的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$.

(1) 若 $\triangle=a^2-4>0$,即 $a>2$,则 $\lambda_1+\lambda_2=-a$,$\lambda_1\lambda_2=-1$.

$\therefore \lambda_1<0,\lambda_2<0$,方程通解为 $f(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

$\therefore f'(x)=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(2) 若 $\triangle=a^2-4=0$,即 $a=2$,则 $\lambda_1=\lambda_2<0$,

方程通解为 $f(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}$,

$$f'(x)=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+(C_2+C_2\lambda_2x)e^{\lambda_2 x}$$
$$=(C_1\lambda_1+C_2)e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2xe^{\lambda_2 x},$$

有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(3) 若 $\triangle=a^2-4<0$,即 $a>2$,则 $\gamma_{1,2}=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$.

方程通解为 $f(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right)$,

$$f'(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{C_2\sqrt{4-a^2}-aC_1}{2}\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x-\frac{C_1\sqrt{4-a^2}+aC_2}{2}\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x\right).$$

有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

综上,有
$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}-\left(f''(x)+af'(x)\right)dx=-\left(f'(x)+af(x)\right)\Big|_0^{+\infty}$$
$$=-\left(\lim_{x\to+\infty}f'(x)+a\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)+\left(f'(0)+af(0)\right)$$
$$=n+am.$$

故应填 $n+am$.

**阅卷人说》》》**

本题思路清晰,但计算量大,考生平时要训练自己的计算速度,注意下列两个知识点:

①

| 特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根 $\lambda_1\lambda_2$ | 微分方程的 $y''+py'+qy=0$ 的通解 |
|---|---|
| 两个不相等实根 $\gamma_1,\gamma_2$ | $y=C_1e^{\gamma_1 x}+C_2e^{\gamma_2 x}$ |
| 两个相等实根 $\gamma_1=\gamma_2$ | $y=(C_1+C_2x)e^{\gamma_1 x}$ |
| 一对共轭复根 $\gamma_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ | $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ |

② 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(0).$$

③ 请读者自行查看 2016 年数学一(16). 相似度极高.

(12) $4\mathrm{e}$

【考点定位】变上限积分函数求导,二阶偏导数.

【思路探索】先求一阶导数,再求二阶偏导数.

解 $\frac{\partial f}{\partial y}=x\mathrm{e}^{x(xy)^2}=x\mathrm{e}^{x^3y^2}$,$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\mathrm{e}^{x^3y^2}+3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}=\mathrm{e}^{x^3y^2}(1+3x^3y^2)$

$\therefore \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,1)}=4\mathrm{e}.$

故应填 $4\mathrm{e}$.

**阅卷人说》》》**

本题综合考查偏导数和变限积分的导数,并利用"二阶混合偏导数若连续"则相等的结论.若光计算$\frac{\partial f}{\partial x}$运算量会大.

(13) $a^2(a^2-4)$

【考点定位】四阶数字型行列式的计算.

【思路探索】利用每列元素之和相等的规律,先求和,提出公共因子,再进一步计算.

解 $$原式=a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&1&-1\\0&2&a+1&1\\0&0&a&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&1&-1\\2&a+1&1\\0&a&a\end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix}a&2&-1\\2&a&1\\0&0&1\end{vmatrix}=a^2(a^2-4)$$

故应填 $a^2(a^2-4)$.

**阅卷人说》》》**

对于数字型行列式,每行元素之和相等或者每列元素之和相等,是考研中的热点,但是也是基础题型.

(14) $\frac{2}{\pi}$

【考点定位】随机变量函数的数学期望,协方差计算.

【思路探索】利用均匀分布概率密度函数,协方差计算公式 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ 展开计算.

解 由 $X$ 服从区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上的均匀分布

可得 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & 其他.\end{cases}$

由协方差计算公式，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=E(X\cdot\sin X)-E(X)\cdot E(\sin X)\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x\sin x\cdot\frac{1}{\pi}\right)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\ \frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x-0\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}(-\cos x)\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\left[x(-\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

故应填$\frac{2}{\pi}$.

**阅卷人说>>>**

考生应记住均匀分布的概率密度函数和协方差基本计算公式，在此基础上重点掌握若$Y=g(X)$，$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$，针对$E(X\sin X)$和$E(\sin X)$，利用积分计算连续型随机变量函数的数学期望.

**三、解答题**

(15)**【考点定位】**二元函数无条件极值.

**【思路探索】**先求函数的驻点，再利用极值的充分条件求极值.

**解** 令$\begin{cases}f'_x=3x^2-y=0\\f'_y=24y^2-x=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{1}{6},\\y=\frac{1}{12}.\end{cases}$

又$f''_{xx}=6x$，$f''_{xy}=-1$，$f''_{yy}=48y$.

在$(0,0)$处，$A=0$，$B=-1$，$C=0$，$AC-B^2<0$，不取极值；

在$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$处，$A=1$，$B=-1$，$C=4$，$AC-B^2>0$，$A>0$.

∴ 函数有极小值$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

**阅卷人说>>>**

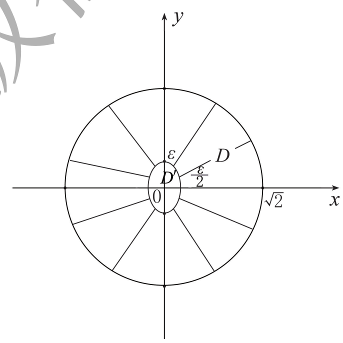
本题属于基础题，难度较小，计算较易，知识点单一，直来直去. 考生务必做好基础题，这是保分的.

(16)【考点定位】第二类曲线积分，格林公式.

【思路探索】构造可以使用格林公式的积分路径，利用格林公式计算曲线积分.

解 令 $P(x,y)=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

所以积分与路径无关.




取 $L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon\to0^+)$，取逆时针方向，$D,D'$ 如图所示. 则

$$I=\int_{L+L_1^-}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

而 $\displaystyle\int_{L+L_1^-}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}\sigma=0$

$$\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D'}2\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot2\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\pi$$

**阅卷人说》》》**

本题在历年真题中的难度中等偏上，也是数学一区别于数学二、三的题目. 解题思路与方法中规中矩，不偏不倚，只是补线，使用格林公式. 难度在于：为什么选取 $L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon\to0^+)$？原因两点：① 往年真题出现过，请查找2000年数学一；② 令 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$，被积表达式分母可化为常数，后面部分易于计算.

本题又一次说明往年真题的重要性！

(17)【考点定位】幂级数，微分方程.

【思路探索】先求幂级数的收敛半径，再求和函数.

解 证明：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1.$

所以，收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$，即当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$(|x|<1)$ 则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_nx^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

$$=1+\frac{1}{2}S(x)+xS'(x)$$

即 $(1+x)S'(x)=1+\dfrac{1}{2}S(x)$，这是可分离变量的微分方程，分离变量，$\dfrac{\mathrm{d}S(x)}{2+S(x)}=\dfrac{\mathrm{d}x}{2(1-x)}$，积

分，得 $\ln|2+S(x)|=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\ln|C|$（$C$ 为常数）

整理得 $S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}-2$，（$C$ 为常数）

又 $S(0)=0$，得 $C=2$. 因此有 $S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2$，$(-1<x<1)$.

**阅卷人说>>>**

本题是一道典型的幂级数与微分方程相结合的考题，证明部分思路明确，计算和函数部分比较困难. 难度在于推导微分方程，推倒时往往先求导，充分注意系数的变化，结合 $(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$，通过拆分，实现 $S(x)$，$S'(x)$ 的关系式.

考生还应注意一点. 此类题目往往包含初始条件，而该条件就隐藏在级数中，一般情况是 $x=0$ 处的值.

同类真题请考生查阅 2007 数学一(20) 题和 2013 年数学一(16) 题.

(18) **【考点定位】** 第二类(对坐标) 的曲面积分.

**【思路探索】** 利用两类曲面积分之间的联系计算.

**解** 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\therefore z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

曲面上任意一点的法向量 $\vec{\boldsymbol{n}}=(z'_x,z'_y,-1)$，$|\vec{\boldsymbol{n}}|=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$

其方向余弦为 $\cos\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\boldsymbol{\gamma}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}s\cdot\cos\boldsymbol{\alpha}$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\mathrm{d}s\cdot\cos\boldsymbol{\beta}$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}s\cdot\cos\boldsymbol{\gamma}$

得 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\cos\boldsymbol{\alpha}}{\cos\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\cos\boldsymbol{\beta}}{\cos\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma}\left[(xf(xy)+2y-x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+(yf(xy)+2y-x)\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+(zf(xy)+z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又曲面 $\sum$ 在 $x_0y$ 面的投影为 $D_{xy}:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$. 取下侧

$$\therefore I=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\cdot\mathrm{d}r=\frac{14}{3}\pi.$$

阅卷人说>>>

本题思路明显,工具指向性强,计算量中档偏上,曲面积分类正常题型.

因为被积表达式中有未知函数,且$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$中也包含有未知函数,所以不考虑直接往三个坐标面投影,也不能运用高斯公式,只能使用两类曲面积分之间的联系来处理.

① 曲面法向量的方向余弦为(下侧则加负号)

$$\cos\boldsymbol{\alpha}=-\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\cos\boldsymbol{\beta}=-\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\cos\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

② 两类曲面积分的关系:

$\mathrm{d}s\cos\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}s\cos\boldsymbol{\beta}=\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}s\cos\boldsymbol{\gamma}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

从而 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-z_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-z_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

第二类曲面积分既可转化为第一类,也可转化为对某一个坐标平面上坐标的积分.本题就用了后者.

③ 类似处理问题方式,请参看《高等数学》第七版(下册)231页例3.

(19)**【考点定位】**微分中值定理.

**【思路探索】**用拉格朗日中值定理证明(Ⅰ),用反证法证明(Ⅱ).

证 (Ⅰ)若$M=0$,则$f(x)=0$,结论成立.

若$M>0$,设$|f(x)|$在$c(0<c<2)$处取得最大值,即$|f(c)|=M$.

若$0<c<1$,由拉格朗日中值定理,存在$\xi_1\in(0,c)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{M}{c},$$

从而$|f'(\xi)|=\frac{M}{c}>M$;

若$c=1$,$|f'(\xi)|=M$;

若$1<c<2$,由拉格朗日中值定理,存在$\xi_2\in(c,2)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(c)}{2-c}=\frac{-M}{2-c},$$

从而$|f'(\xi)|=\frac{M}{2-c}>M$.

综上,$M\geqslant 0$时,总有$|f'(\xi)|\geqslant M\ (\xi\in(0,2))$.

(Ⅱ)若$M>0$,则$c\neq 0,2$

有 $M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|=\left|\int_0^c f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^c|f'(x)|\mathrm{d}x<Mc$, ①

另 $M=|f(c)|=|f(2)-f(c)|=\left|\int_c^2 f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_c^2|f'(x)|\mathrm{d}x<M(2-c)$. ②

①+② 得 $2M<Mc+M(2-c)=2M$

矛盾.$\therefore M=0$.

**阅卷人说**

（Ⅰ）的思路比较清晰，只能用拉格朗日中值定理，并分类讨论. 函数和一阶导数联结的纽带为拉格朗日中值定理.

（Ⅱ）题，一般采用反证法，将导数和原函数结合的工具是牛顿-莱布尼兹公式，在（Ⅰ）的基础上通过定积分的性质构造矛盾.

同类题目参见山东科学技术出版社《高等数学精选精解》（第二版）109 页 366 题.

（20）**【考点定位】**二次型的正交变换以及实对称矩阵的相似对角化.

**【思路探索】**二次型经过正交变换变成新的二次型，前后对应的实对称矩阵是相似的关系. 通过两个矩阵的相似对角化，可以实现二者的相似关系.

**解** （Ⅰ）设 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，则

$$f=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\text{，其中 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & 2\\ 2 & b\end{bmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$$

即 $1+4=a+b$，$ab=4$，解得 $a=4$，$b=1$.

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\Lambda$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\Lambda$ 则

$$\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)=\boldsymbol{B},$$

因此 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=0$，解得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=5$，

于是 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，得 $\xi_1=(2,1)^T$

$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，得 $\xi_2=(1,-2)^T$，即 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$.

$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，得 $\eta_1=(1,-2)^T$

$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，得 $\eta_2=(2,1)^T$，即 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$.

**错例分析** 本题的主要错误是考生没有理解二次型经过正交变换变成另外一个二次型，对应的矩阵的之间的关系. 从而没有得到二者的相似关系.

**阅卷人说》》》**

二次型的正交变换是考研数学的重点和难点. 要特别注意的是，二次型经过非退化线性替换，对应的矩阵是合同的关系，而如果经过正交变换，则是相似关系.

(21)【考点定位】矩阵可逆性的判别，矩阵的间接相似对角化.

【思路探索】第一问利用列向量的线性无关判别矩阵可逆；第二问利用 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵，间接判别对角化问题.

**解** (Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 所以 $r(\boldsymbol{P})=2$，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

(Ⅱ) 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)=0$$

得 $\lambda_1=-3.\lambda_2=2$. 因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可以相似对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

**阅卷人说》》》**

1. 矩阵可逆的充要条件有很多，比如行向量线性无关，或者列向量线性无关等等.
2. 矩阵相似是考研数学线代部分的重点和难点. 请考生务必掌握以下结论：

(1) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，$\boldsymbol{P}$ 可逆.

(2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似的必要条件有：

①$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值、行列式、秩、迹；

②$k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m,f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B}),\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T,\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

(22)【考点定位】二维随机变量的分布函数.

【思路探索】第一问，利用基本公式 $F(x,y)=P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\}$，代入离散型随机变量 $X3$ 的不同取值及其对应概率，展开求分布函数，第二问同理，按照 $X3$ 不同取值，将 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}\Big|=P\{X_3(X_1-X_3)+X_2\leqslant y\}$ 展开进行证明.

**解** (Ⅰ) 由二维随机变量的分布函数的定义，可得

$F(X_1,Y)=P\{X_1\leqslant x_1,Y\leqslant y\}=P\{X_1\leqslant x_1,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}$

$\because P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$，则可进行离散型随机变量不同取值分情况代入

$$\begin{aligned}\therefore F(X_1,Y)=&\ P\{X_3=0,X_1\leqslant x_1,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}+P\{X_3=1,X_1\leqslant x_1,X_3X_1+(1-\\&X_3)X_2\leqslant y\}\\=&\ P\{X_3=0,X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant y\}+P\{X_3=1,X_1\leqslant x_1,X_1\leqslant y\}\end{aligned}$$

($X_1,X_2,X_3$ 相互独立)

$$= P\{X_3 = 0\} \cdot P\{X_1 \leqslant x_1\} \cdot P\{X_2 \leqslant y\} + P\{X_3 = 1\} \cdot P\{X_1 \leqslant \min(x_1, y)\}$$

$$= \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant x_1\} \cdot P\{X_2 \leqslant y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \leqslant \min(x_1, y)\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x_1)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) & x_1 \geqslant y \\ \frac{1}{2}\Phi(x_1)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(x_1) & x_1 < y \end{cases}$$

（Ⅱ）证明：

$$F(Y) = P\{X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leqslant y\}$$
$$= P\{X_3 = 0, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leqslant y\} + P\{X_3 = 1, X_3X_1 + (1 - X_3)X_2 \leqslant y\}$$
$$= P\{X_3 = 0, X_2 \leqslant y\} + P\{X_3 = 1, X_1 \leqslant y\}$$
$$= P\{X_3 = 0\} \cdot P\{X_2 \leqslant y\} + P\{X_3 = 1\} \cdot P\{X_1 \leqslant y\}$$
$$= \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)$$

∴$Y$ 服从标准正态分布.

**阅卷人说》》**

考生针对此类即含有连续型，又含有离散型随机变量，混合变量表达的随机变量分布函数问题，有效的解法是按照离散型随机变量不同取值代入后展开，利用概率计算公式，获得仅含有连续型随机变量的表达，再进一步利用连续型随机变量的已知条件即可求解.

(23)**【考点定位】**概率的性质与公式，最大似然估计.

**【思路探索】**第一问利用基本概率计算公式 $P\{T > t\} = 1 - P\{T \leqslant t\}$ 和条件概率计算公式 $P\{T > t + s \mid T > s\} = \dfrac{P\{T > t + s, T > s\}}{P\{T > s\}}$，利用已知分布函数即可求解；第二问首先对第一问的分布函数求导获得概率密度函数，再构造对数似然函数，关于 $\theta$ 求导后，令导数等于零，得 $\theta$ 的最大似然估计值.

**解**（Ⅰ）$P\{T > t\} = 1 - P\{T \leqslant t\} = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}\ (t > 0)$

$$P\{T > s + t \mid T > s\} = \frac{P\{T > s + t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s + t\}}{P\{T > s\}} = \frac{e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{e^{-(\frac{s}{\theta})^m}}$$
$$= e^{(\frac{s}{\theta})^m - (\frac{s+t}{\theta})^m}\ (s > 0, t > 0)$$

（Ⅱ）由 $F'(t) = f(t)$ 可得概率密度函数

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m} \cdot e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln[L(\theta)] = \ln\left[\prod_{i=1}^{n} f(t_i, \theta)\right] = \ln\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m}\right] = \ln\left[\frac{m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}}{\theta^{mn}} \cdot e^{-\frac{1}{\theta^m}\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i^m}\right]$$

$$=n\ln m+(m-1)\ln(t_1t_2\cdots t_n)-mn\ln\theta-\frac{1}{\theta^m}\cdot\sum_{i=1}^{n}t_i^m$$

求导得$\dfrac{\mathrm{d}\left(\ln[L(\theta)]\right)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{mn}{\theta}+m\dfrac{1}{\theta^{m+1}}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m=0$

即$\dfrac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m=n$，则解得 $\theta$ 的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}$.

**阅卷人说》》》**

此题第一问是概率计算基本题型，考生应掌握分布函数与概率计算的关系；第二问是在第一问的基础上求出对应概率密度函数，按照最大似然估计的解题步骤即可求解. 值得考生注意的是此题构造对数似然函数及求导时，对计算能力有一定要求，整理化简时要确保正确性.