绝密★启用前

2020 年全国硕士研究生招生考试

数学(三)试题

一、选择题(1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$,则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}$ 【　　】

(A) $b\sin a$.　　(B) $b\cos a$.　　(C) $b\sin f(a)$.　　(D) $b\cos f(a)$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为 【　　】

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(3) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数,则 【　　】

(A) $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.

(B) $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

(C) $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数.

(D) $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数.

(4) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2,6)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 【　　】

(A) $(-2,6)$.　　(B) $(-3,1)$.

(C) $(-5,3)$.　　(D) $(-17,15)$.

(5) 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆,a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 【　　】

(A) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(B) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(C) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(D) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

人民邮电出版社

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值为 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，则满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为 【 】

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(C) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(D) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(7) 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为 【 】

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{5}{12}$.

(8) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;1,4;-\frac{1}{2})$，则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 【 】

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$.

(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

二、填空题(9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,\pi)}=$______.

(10) 曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为______.

(11) 设某厂家生产某产品的产量为 Q，成本 $C(Q)=100+13Q$，设该产品的单价为 P，需求量 $Q(P)=\frac{800}{P+3}-2$，则该厂家获得最大利润时的产量为______.

(12) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right\}$，则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为______.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,3,\cdots$，Y 表示 X 被 3 除的余数，则 $EY=$______.

三、解答题(15 ～ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

已知 a,b 为常数,若 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小,求 a,b.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$,且 $f(0)=1,f'(0)=-1$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(18)(本题满分 10 分)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,y\geqslant 0\}$,连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

求 $\iint_D xf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数,$f(0)=f(2)=0$,$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$,证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $|f'(\xi)|\geqslant M$;

(Ⅱ)若对任意的 $x\in(0,2)$,$|f'(x)|\leqslant M$,则 $M=0$.

(20)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

（Ⅰ）求 a,b 值；

（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$上服从均匀分布，令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0,\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leqslant 0,\end{cases}$$

（Ⅰ）求二维随机变量(Z_1,Z_2)的概率分布；

（Ⅱ）求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

(23)（本题满分 11 分）

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

（Ⅱ）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

2020 年全国硕士研究生招生考试数学(三)真题点评

答案速查

一、选择题

(1) B　(2) C　(3) A　(4) B　(5) C　(6) D　(7) D　(8) C

二、填空题

(9) $(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　(10) $y=x-1$　(11) 8　(12) $\pi\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$　(13) $a^2(a^2-4)$　(14) $\dfrac{8}{7}$

三、解答题

(15) $a=1, b=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

(16) 函数有极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$

(17) (Ⅰ) $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$　(Ⅱ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$

(18) $\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{3}{128}\pi^2$

(19) 略

(20) (Ⅰ) $a=4, b=1$　(Ⅱ) $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\dfrac{4}{5} & -\dfrac{3}{5}\\ -\dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5}\end{bmatrix}$

(21) (Ⅰ) 略　(Ⅱ) 是

(22) (Ⅰ)

Z_1 \ Z_2	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

(Ⅱ) $\rho_{Z_1Z_2}=\dfrac{1}{3}$

(23) (Ⅰ) $P\{T>t\}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, t>0$　$P\{T>s+t\mid T>s\}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{t+s}{\theta}\right)^m+\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}$

(Ⅱ) $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}$

测评结果

题型 / 测评项目	选择题 1 ～ 8	填空题 9 ～ 14	解答题 15 ～ 19	解答题 20 ～ 21	解答题 22 ～ 23	合计
建议用时	30 分钟	25 分钟	75 分钟	25 分钟	25 分钟	180 分钟
实际用时						
得分						

试卷评析

考点分布表一(高等数学部分)

考　点	极限	一元微分学	一元积分学	多元微分学	多元积分学	级数	常微分方程
分　数	18	18	8	14	10	4	10

考点分布表二(线性代数部分)

考　点	行列式	矩阵	向量	方程组	特征值与特征向量	二次型
分　数	0	4	11	4	11	4

考点分布表三(概率论与数理统计部分)

考　点	事件概率	一维随机变量	二维随机变量	数字特征	抽样分布	参数估计	假设检验
分　数	4	6	6	12	0	6	0

高等数学部分有13道题,共82分,约占数学(三)总分的55%;2020年数学三的试题依旧遵循以基础为纲,重视理解与应用.试题难度基本与2019年一致,没有偏题,冷题,但是计算量略有提升,许多计算讲求一定的技巧,对学生的计算能力有比较高的要求.试题考点分配比较平均,对考点的考查较为全面,并且重点考查应用.第(2)、(10)、(11)、(12)题,均体现了数学学科考查重视“应用”.其中第(11)题,考查利用导数求解经济问题,体现了数学(三)的经济学特点。第(17)题是常微分方程求解、反常积分与级数综合问题,考查了学生对所学知识理解及灵活运用的能力.第(18)题二重积分的计算,考查了二重积分中的运算技巧。考生在复习的时候,首先要注重基本概念、基本理论、基本方法,然后注重融会贯通,掌握计算技巧,提高自己的计算能力,提高解决综合问题的能力.

线性代数部分5道题,共34分,占总分的22%。知识点的考查覆盖面较以往更广,计算量不大,思路考查为主.(5)主要考查了伴随矩阵的秩,齐次线性方程组的基础解系,是基础考点.(6)主要考查了特征值和特征向量的基本概念和性质(13)主要考查了四阶数字型行列式的计算,是基本题目。(20)二次型的正交变换,以及实对称矩阵的相似对角化。(21)主要考查了矩阵可逆性的判别,矩阵的间接相似对角化,是考研数学的重点题型.

2020年考研概率论与数理统计部分试题相对常规.从题型方面来看,与往年保持一致,仍是涵盖了选择题、填空题以及解答题这三部分.其中在选择题的部分仍是后两道:7、8题;填空题仍是后一道14题;解答题仍是后两道22、23题.题目设置和分值与往年相同。从考点来看,第7题考查的是概率的性质与公式;第8题是将数字特征与独立性判断相结合;第14题考查的是一维离散型随机变量分布律与数字特征;解答题第22题考查了二维离散型随机变量的分布律与数字特征;第23题是参数估计,考查了概率密度函数和点估计中的最大似然估计,后两道分值较高的大题,与历年试题中考点基本一致.由上分析可知,就整体难度而言,今年数学(三)概率论与数理统计部分难度不大,依然没有跳出我们复习的范围,依然是对基本概念,基本方法,基本计算的考察.2020数学(三)中概率论与数理统计部分题目的综合难度为:中等偏易.

试题详解

一、选择题

(1) B

【考点定位】极限的计算.

【思路探索】利用拉格朗日中值定理将所求极限式子的分子变形，即可得到已知极限的形式.

解 因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，所以 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$.

由拉格朗日中值定理，$\sin f(x)-\sin a=\cos\xi[f(x)-a]$（其中 ξ 介于 $f(x)$ 与 a 之间）.

进而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}\cdot\cos\xi=b\cos a$. 故应选(B).

阅卷人说

拉格朗日中值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. 只要将所求极限式子的分子应用拉格朗日中值定理，即可得到已知极限的形式，问题即可解决.

(2) C

【考点定位】间断点及其分类.

【思路探索】先求出函数的间断点，然后再由 x 趋于各间断点时的极限即可得结果.

解 间断点为：$x=-1, x=0, x=1, x=2$

由 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln|1+x|}{(x-2)(e^x-1)}=\infty$ 知 $x=-1$ 是第二类间断点；

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln|x+1|}{(x-2)(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln|x+1|}{(x-2)\cdot x}=-\dfrac{e^{-1}}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=-\dfrac{1}{2e}$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}=0$ 而 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点；

同理由 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(x+1)}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$ 知 $x=2$ 也是 $f(x)$ 的第二类间断点. 故应选(C).

错例分析 有同学选择 B，其根据是 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\ln(1+x)}{(e^x-1)(x-2)}=0$，由此便得 $x=1$ 不是第二类间断点，显然是没有搞清楚间断点的定义，再者就是指数函数 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 在间断点 $x=1$ 处其右极限是不存在.

阅卷人说》》》

① 考生应熟练掌握求间断点的方法；

② 间断点 x_0 类型的判别是根据 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 的结果来决定的；

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$（$c$ 为常数），则 x_0 为第一类可去间断点；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在但不相等，则 x_0 为第一类跳跃间断点；

其他的间断点为第二类间断点.

（3）A

【考点定位】函数、导数与原函数奇偶性结论.

【思路探索】利用函数与其导数，函数与其原函数的奇偶性结论即可.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f'(x)$ 为偶函数.

又因为 $\cos f(-x)=\cos[-f(x)]=\cos f(x)$，所以 $\cos f(x)$ 为偶函数，因而 $\cos f(x)+f'(x)$ 为偶函数.

记 $F(x)=\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$，得 $F'(x)=\cos f(x)+f'(x)$，可知 $F'(x)$ 为偶函数，又因为 $F(0)=0$，进而得 $F(x)=\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$ 是奇函数. 故应选（A）.

阅卷人说》》》

原函数如果是奇函数或者偶函数，那么导函数和原函数奇偶性是相反的. 但是，如果给出的条件是导函数的奇偶性，求原函数的奇偶性，那么就不一定了，因为从导函数到原函数有一个积分的环节，是可以加上任意常数的，所以导函数是奇函数时，原函数都是偶函数，但是导函数是偶函数时，原函数有且只有一种情况是奇函数，就是满足 $f(0)=0$ 的条件下的取值.

（4）B

【考点定位】幂函数的收敛区间.

【思路探索】幂级数逐项求导、逐项积分后收敛半径不变.

解 因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 收敛区间为 $(-2,6)$，所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛半径为 4. 令 $t=x-2$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n=(x-2)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^{n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty} na_nt^{n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'.$$

因而幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nt^n$ 的收敛半径为 4. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n[(x+1)^2]^n$，

由 $(x+1)^2<4$ 得 $-3<x<1$. 所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 $(-3,1)$. 故应选（B）.

阅卷人说

幂级数逐项求导、逐项积分后收敛半径不变，进而收敛区间不变.

（5）C

【考点定位】伴随矩阵的秩，齐次线性方程组的基础解系.

【思路探索】根据秩的定义，得到 $\boldsymbol{A}$ 的秩，进而得到伴随矩阵的秩，再得到基础解系.

解 由于 $A_{12}\neq 0$，$r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，成基础解系. 由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}A_{11}\\A_{12}\\A_{13}\\A_{14}\end{bmatrix}=0$$

可知，$A_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+A_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+A_{13}\boldsymbol{\alpha}_3+A_{14}\boldsymbol{\alpha}_4=0$，因为 $A_{12}\neq 0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为基础解系，故应选(C).

又因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}$ 的每一列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{A}^*x=0$ 的解向量. 只要找到是 $\boldsymbol{A}^*x=0$ 的 3 个无关解就构成基础解系.

阅卷人说

伴随矩阵是考研中基础且重要的考点. 大家务必掌握以下常用结论：

①$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；　②$(k\boldsymbol{A}^*)=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*\ (n\geqslant 2)$；

③$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$；　④$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$；

⑤ 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，亦即 $\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}^*$，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}$；

⑥ $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\quad(n\geqslant 2)$；　⑦$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$；

⑧$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n & 若\ r(\boldsymbol{A})=n\\1 & 若\ r(\boldsymbol{A})=n-1\\0 & 若\ r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$

（6）D

【考点定位】特征值和特征向量的基本概念和性质.

【思路探索】根据特征值和特征向量的定义可得.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为属于特征值 1 的线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2$ 仍为属于特征值 1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量，故 $-\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量矩阵，因为特征向量与特征值的排序一一对应，故只需 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 就有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$，故应选(D).

阅卷人说>>>

特征值和特征向量是考研数学的重点. 请大家熟练掌握定义和下列结论：

	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^m$	$f(\boldsymbol{A})=\sum_{i=0}^{n}a_i\boldsymbol{A}^i$	$\boldsymbol{A}^T$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i$	λ	λ^{-1}	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda},\lambda\neq 0$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	不确定	ξ	ξ	$\boldsymbol{P}^{-1}\xi$

(7) D

【考点定位】随机事件的关系与概率运算.

【思路探索】分别计算 A,B,C 三个事件中，某个事件发生另外两个不发生的概率，再求和.

解　$P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$

$=P(A\cap(\overline{B\cup C}))+P(B\cap(\overline{A\cup C}))+P(C\cap(\overline{A\cup B}))$

$=P(A)-P(A\cap(B\cup C)+P(B)-P(B\cap(A\cup C))+P(C)-P(C\cap(A\cup B))$

$=[P(A)-P(AB\cup AC)]+[P(B)-P(BA\cup BC)]+[P(C)-P(CA\cup CB)]$

$=[P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)]+[P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)]+$

$[P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$

$=\left[\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0\right]+\left[\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0\right]$

$=\frac{5}{12}$

故应选(D).

阅卷人说>>>

本题为随机事件概率计算的基本题型，考生应从问题出发，分析出 A,B,C 中恰有一个事件发生包含着 $P(A\ \overline{B}\ \overline{C})$，$P(B\ \overline{A}\ \overline{C})$，$P(C\ \overline{B}\ \overline{A})$ 三种情况，利用概率计算公式 $P(A\ \overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 分别计算出三种情况的概率，求和即可求解.

(8) C

【考点定位】数学期望，方差，协方差的计算，随机变量相互独立的判断.

【思路探索】计算的数学期望，方差和协方差，判断是否服从标准正态分布，是否相互独立.

解　由题意可得 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1),\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$

由公式 $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$，$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

可求出 $E\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right]=0$

$$\begin{aligned}D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right]&=\frac{1}{3}[D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}]\\&=\frac{1}{3}\left[1+4+2\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1\cdot2\right]\\&=1\end{aligned}$$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\sim N(0,1)$

$$\begin{aligned}\text{又}\because \mathrm{Cov}(X,X+Y)&=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=D(X)+\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}\\&=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1\cdot2\\&=0\end{aligned}$$

$\therefore X$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ 相互独立.

故应选(C).

阅卷人说 >>>

考生需掌握数学期望，方差，协方差的计算公式，通过协方差是否为零判断随机变量是否相互独立.

二、填空题

(9) $(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

【考点定位】 二元函数全微分的计算.

【思路探索】 利用“先求后代”或者“先代后求”求得偏导数之后，再计算全微分.

解 **解法一：** 先求后代.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=-1$；$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

解法二： 先代后求.

当 $y=\pi$ 时，$z=\arctan(\pi x-\sin x)$，

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\pi-\cos x}{1+(\pi x-\sin x)^2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\pi-1$；

当 $x=0$ 时，$z=\arctan(\sin y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\cos y}{1+(\sin y)^2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=-1$；$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

故应填 $(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

阅卷人说》》》

求二元函数在某一点的偏导数值可以采用"先求后代"和"先代后求"两种方式."先求后代"就是先求出偏导函数，然后代入该点的坐标."先代后求"是把其中一个变量代入坐标值，将二元函数化成一元函数，求导之后，再代入另一个变量的坐标值.

(10) $y=x-1$

【考点定位】隐函数求导；导数的几何意义；切线方程.

【思路探索】利用隐函数求导得到切线斜率，利用直线方程的点斜式即可写出所求切线方程.

解 方程两边关于 x 求导得：$1+y'+\mathrm{e}^{2xy}(2y+2xy')=0$.

将 $x=0$，$y=-1$ 代入上式解得：$y'=1$. 所求切线方程为 $y+1=x$，即 $y=x-1$.

故应填 $y=x-1$.

阅卷人说》》》

本题是一道简单的综合题，考查了导数的几何意义和隐函数求导. 隐函数求导法有三种：(1) 直接求导法；(2) 利用隐函数求导公式；(3) 利用全微分的形式不变性.

(11) 8

【考点定位】导数的经济应用.

【思路探索】利润函数 = 需求量 × 单价 − 成本，得到利润函数之后，利用导数求利润函数的最大值.

解 由需求量 $Q=\dfrac{800}{P+3}-2$ 得，$P=\dfrac{800}{Q+2}-3$.

因此利润函数

$$L(Q)=QP-C(Q)=Q\left(\frac{800}{Q+2}-3\right)-100-13Q=\frac{800Q}{Q+2}-100-16Q.$$

由 $L'(Q)=\dfrac{1600-16(Q+2)^2}{(Q+2)^2}=0$ 得：$Q=8$.

进而当产量 $Q=8$ 时，工厂取得最大利润.

故应填 8.

阅卷人说>>>

利用导数在经济学中的应用这类问题是近几年考研的热点问题之一，也是数学（三）考研试题单独的考点之一.但这类题目一般都不会太难，只要考生理解相关的基本概念、记住相应的基本公式及计算方法即可得到结果

（12）$\pi\ln 2-\frac{\pi}{3}$

【考点定位】定积分几何应用中的求旋转体体积.

【思路探索】利用旋转体体积公式即可.

解 D 绕 y 轴旋转所形成的旋转体体积为：

$$\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(2y)^2\mathrm{d}y+\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y=\pi\cdot\frac{4}{3}y^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\pi[\ln y-y]\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\pi\ln 2-\frac{\pi}{3}.$$

故应填 $\pi\ln 2-\frac{\pi}{3}$.

阅卷人说>>>

本题考查的是定积分几何应用中的求旋转体的体积.区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上旋转半径的表达式不同，这一点请考生注意.

（13）$a^2(a^2-4)$

【考点定位】四阶数字型行列式的计算.

【思路探索】利用每列元素之和相等的规律，先求和，提出公共因子，再进一步计算.

解 原式$=a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a&1&-1\\0&2&a+1&1\\0&0&a&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&1&-1\\2&a+1&1\\0&a&a\end{vmatrix}$

$$=a^2\begin{vmatrix}a&2&-1\\2&a&1\\0&0&1\end{vmatrix}=a^2(a^2-4)$$

故应填 $a^2(a^2-4)$.

阅卷人说>>>

对于数字型行列式，每行元素之和相等或者每列元素之和相等，是考研中的热点，但是也是基础题型.

（14）$\frac{8}{7}$

【考点定位】一维离散型随机变量的分布律与数学期望.

【思路探索】随机变量 Y 所有不同取值时的概率，利用分布律求数学期望.

解 由题意可知 Y 的所有可能取值为 0，1，2

则 $P\{Y=0\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{X=3n\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$

$$P\{Y=1\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=3n+1\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$$

$$P\{Y=2\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=3n+2\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+2}}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$$

所以 $E(Y)=\sum\limits_{i=1}^{3}y_iP_i=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$

故应填 $\frac{8}{7}$.

阅卷人说》》》

本题是求一维离散型随机变量分布律与数学期望的基本题型，考生应注意此题融入了等比级数求和公式来求概率值.

三、解答题

（15）**【考点定位】**等价无穷小的定义及等价无穷小替换.

【思路探索】根据等价无穷小的定义得到极限式，通过已知极限探寻 a，b 需要满足的条件.

解 因为 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 是等价无穷小，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{b}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}n^a\left[\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}\right]$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}n^a\left[\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\right]=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}n^a\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}n^a\left[n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^2}+\cdots\right)-1\right]$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}n^{a-1}+\frac{1}{3}n^{a-2}-\frac{1}{4}n^{a-3}+\cdots\right)=1.$$

因此 $a-1=0,-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}}{b}=1$，得 $a=1,b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

阅卷人说》》

本题属于求极限的逆问题，即已知函数的极限值求其表达式中的待定常数. 由等价无穷小定义出发，得到已知极限，进而利用等价无穷小替换化简极限. 在求极限的过程中用到函数的幂级数展开式 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(-1<x\leqslant 1)$，得到 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的展开式，使得极限问题得以解决. 该题难度偏大，考查了考生对计算技巧的掌握情况和计算能力.

(16)【**考点定位**】二元函数无条件极值.

【**思路探索**】先求函数的驻点，再求极值.

解 令 $\begin{cases} f'_x=3x^2-y=0 \\ f'_y=24y^2-x=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{6}, \\ y=\frac{1}{12}. \end{cases}$

又 $f''_{xx}=6x,f''_{xy}=-1,f''_{yy}=48y$.

在 $(0,0)$ 处，$A=0,B=-1,C=0,AC-B^2<0$，不取极值；

在 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 处，$A=1,B=-1,C=4,AC-B^2>0,A>0$.

$\therefore$ 函数有极小值 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{216}$.

阅卷人说》》

本题属于基础题，难度较小，计算较易，知识点单一，直来直去. 考生务必做好基础题，这是保分的.

(17)【**考点定位**】二阶常系数齐次线性微分方程的求解；反常积分；等比级数.

【**思路探索**】通过求解二阶常系数齐次线性微分方程的特解求得 $f(x)$ 的表达式，然后代入求得反常积分 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，最后求得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

解 (Ⅰ) 二阶常系数齐次线性方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为

$r^2+2r+5=0$，所以 $r_{1,2}=-1\pm 2i$，因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\mathrm{e}^{-x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)$，

将 $f(0)=1,f'(0)=-1$，代入上式解得 $C_1=1,C_2=0$. 从而 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$.

(Ⅱ) $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\int_{n\pi}^{+\infty}\cos 2x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$

$$=-\cos 2x\cdot e^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}+\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\cos 2x$$

$$=-\cos 2x\cdot\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}-2\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\cos 2x\cdot\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}+2\int_{n\pi}^{+\infty}\sin 2x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\cos 2x\cdot\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}+2\left[\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{-x}\Big|_{n\pi}^{+\infty}-\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\sin 2x\right]$$

$$=[\mathrm{e}^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)]\Big|_{n\pi}^{+\infty}=4\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x,$$

所以 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}[\mathrm{e}^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)]\Big|_{n\pi}^{+\infty}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5}\frac{2\sin 2x-\cos 2x}{\mathrm{e}^{x}}-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}(2\sin 2n\pi-\cos 2n\pi)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}.$

阅卷人说

这是一道常微分方程、反常积分、级数综合题目.其中方程是二阶常系数齐次线性微分方程,解决反常积分的时候用了分部积分法,最后得到的级数是公比 <1 的等比级数,进而求得结果.该题计算量偏大,考查了考生的计算能力和解决综合问题的能力.

(18)**【考点定位】**二重积分的计算.

【思路探索】利用二重积分的结果是常数,在已知式子两边同时取二重积分,进而求得二元函数的表达式,最后计算二重积分.

解 记 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$,对 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 两边积分得,

$$A=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为积分区域关于 y 轴对称,所以 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

从而 $A=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi.$$

因此可得 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{16}\pi x$.

$\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{3}{16}\pi\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

因为积分区域 D 关于 y 轴对称，$\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy=0$，所以

$$\iint\limits_D xf(x,y)\,dx\,dy=0+\frac{3}{16}\pi\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=\frac{3}{16}\pi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr$$

$$=\frac{3}{64}\pi\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{3}{64}\pi\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{3}{64}\pi\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{3}{128}\pi.$$

阅卷人说》》

本题是一道二重积分计算的综合题.首先要确定函数的表达式，计算过程中既要注意坐标系的选择，又要注意利用对称性和奇偶性化简二重积分的计算；之后再次利用了对称性和奇偶性化简二重积分的计算，同时还应用了定积分常见的结论.这是一道计算量和计算技巧都要求比较高的题目，考生需要灵活处理.

(19)**【考点定位】**微分中值定理.

【思路探索】用拉格朗日中值定理证明(Ⅰ)，用反证法证明(Ⅱ).

证 (Ⅰ) 若 $M=0$，则 $f(x)=0$，结论成立.

若 $M>0$，设 $|f(x)|$ 在 $c(0<c<2)$ 处取得最大值，即 $|f(c)|=M$.

若 $0<c<1$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{M}{c},$$

从而 $|f'(\xi)|=\frac{M}{c}>M$；

若 $c=1$，$|f'(\xi)|=M$；

若 $1<c<2$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_2\in(c,2)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(c)}{2-c}=\frac{-M}{2-c},$$

从而 $|f'(\xi)|=\frac{M}{2-c}>M$.

综上，$M\geqslant 0$ 时，总有 $|f'(\xi)|\geqslant M\ (\xi\in(0,2))$.

(Ⅱ) 若 $M>0$，则 $c\neq 0,2$

有 $M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|=\left|\int_0^c f'(x)dx\right|\leqslant\int_0^c|f'(x)|dx<Mc$ ①

另 $M=|f(c)|=|f(2)-f(c)|=\left|\int_c^2 f'(x)dx\right|\leqslant\int_c^2|f'(x)|dx<M(2-c)$ ②

① + ② 得 $2M<Mc+M(2-c)=2M$

矛盾.$\therefore M=0$.

阅卷人说

(Ⅰ)的思路比较清晰,只能用拉格朗日中值定理,并分类讨论.函数和一阶导数联结的纽带为拉格朗日中值定理.

(Ⅱ)题,一般采用反证法,将导数和原函数结合的工具是牛顿-莱布尼兹公式在(Ⅰ)的基础上通过定积分构造矛盾.

同类题目参见山东科学技术出版社《高等数学精选精解》(第二版)109页366题.

(20)**【考点定位】**二次型的正交变换以及实对称矩阵的相似对角化.

【思路探索】二次型经过正交变换变成新的二次型,前后对应的实对称矩阵是相似的关系.通过两个矩阵的相似对角化,可以实现二者的相似关系.

解 (Ⅰ)设 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}$,经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,则

$$f=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\text{其中 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&2\\2&b\end{bmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$,则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$$

即 $1+4=a+b,ab=4$,解得 $a=4,b=1$.

(Ⅱ)设 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\Lambda,\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\Lambda$ 则

$$\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\right)=\boldsymbol{B},$$

因此 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-4\end{vmatrix}=0$,解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$,

于是 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-1&2\\2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix}$,得 $\xi_1=(2,1)^T$

$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}$,得 $\xi_2=(1,-2)^T$,即 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}$.

$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}-4&-2\\-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix}$,得 $\eta_1=(1,-2)^T$

$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix}$,得 $\eta_2=(2,1)^T$,即 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$.

错例分析 本题的主要错误是考生没有理解二次型经过正交变换变成另外一个二次型,对应的矩阵的之间的关系.从而没有得到二者的相似关系.

阅卷人说>>>

二次型的正交变换是考研数学的重点和难点.要特别注意的是,二次型经过非退化线性替换,对应的矩阵是合同的关系,而如果经过正交变换,则是相似关系.

(21)**【考点定位】**矩阵可逆性的判别,矩阵的间接相似对角化.

【思路探索】第一问利用列向量的线性无关判别矩阵可逆;第二问利用$\boldsymbol{A}$的相似矩阵,间接判别对角化问题.

解 （Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}$是非零向量且不是$\boldsymbol{A}$的特征向量,则$\boldsymbol{A\alpha} \neq k\boldsymbol{\alpha}$,即$\boldsymbol{A\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}$线性无关.所以$r(\boldsymbol{P})=2$,矩阵$\boldsymbol{P}$可逆.

（Ⅱ）设$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,则$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

所以$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$,即$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)=0$$

得$\lambda_1=-3.\lambda_2=2$.因为$\lambda_1\neq\lambda_2$,所以$\boldsymbol{B}$可以相似对角化,则$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

阅卷人说>>>

1. 矩阵可逆的充要条件有很多,比如行向量线性无关,或者列向量线性无关等等.
2. 矩阵相似是考研数学线代部分的重点和难点.请考生务必掌握以下结论:

(1) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相似$\Leftrightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,$\boldsymbol{P}$可逆.

(2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相似的必要条件有:

①$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有相同的特征值、行列式、秩、迹;

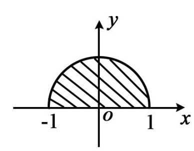
②$k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m,f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B}),\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T,\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$.

(22)**【考点定位】**二维离散型随机变量的分布律与数字特征.

【思路探索】第一问,通过Z_1,Z_2不同取值时X,Y对应区域面积占比求分布律,第二问在第一问的基础上,求Z_1,Z_2和Z_1Z_2的分布律,并对应求出数学期望与方差,最后利用公式求相关系数.

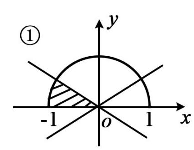
解 （Ⅰ）因为(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$上服从均匀分布,

则如右图所示D的面积为$\frac{\pi}{2}$

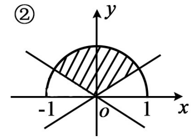


二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi} & (x,y)\in 0\\ 0 & (x,y)\notin 0\end{cases}$

①$P\{(Z_1=0,Z_2=0\}=P\{X-Y\leqslant 0,X+Y<0\}=\frac{1}{4}$

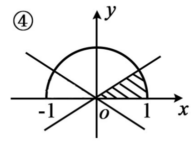


②$P\{(Z_1=0,Z_2=1\}=P\{X-Y\leqslant 0,X+Y>0\}=\frac{1}{2}$



③$P\{(Z_1=1,Z_2=0\}=P\{X-Y>0,X+Y\leqslant 0\}=0$

④$P\{(Z_1=1,Z_2=1\}=P\{X-Y>0,X+Y>0\}=\frac{1}{4}$



所以(Z_1,Z_2)的分布律为

Z_1 \ Z_2	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(Ⅱ)

Z_1	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Z_2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Z_1Z_2	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

可得$E(Z_1)=0\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$　　$D(Z_1)=\left(0-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

$E(Z_2)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$　　$D(Z_2)=\left(0-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$

$E(Z_1Z_2)=0\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$$\therefore P(Z_1Z_2)=\frac{\operatorname{Cov}(Z_1Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\cdot\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{E(Z_1Z_2)-E(Z_1)\cdot E(Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\cdot\sqrt{D(Z_2)}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{3}$$

阅卷人说》》》

考生针对此类二维离散型随机变量需分析所有可能取值,要会联合分布律的求法、边缘分布律的求法,值得注意的是本题还综合了连续型随机变量的均匀分布,数学期望,方差,相关系数,此题只有扎实的掌握这些基本知识点才能顺利求解.

(23)【考点定位】概率的性质与公式，最大似然估计.

【思路探索】第一问利用基本概率计算公式 $P\{T>t\}=1-P\{T\leqslant t\}$ 和条件概率计算公式 $P\{T>t+s \mid T>s\}=\dfrac{P\{T>t+s,T>s\}}{P\{T>s\}}$，利用已知分布函数即可求解；第二问首先对第一问的分布函数求导获得概率密度函数，再构造对数似然函数，关于 θ 求导后，令导数等于零，得 θ 的最大似然估计值.

解（Ⅰ）$P\{T>t\}=1-P\{T\leqslant t\}=1-F(t)=1-\left(1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}\right)=e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}\ (t>0)$

$$P\{T>s+t \mid T>s\}=\frac{P\{T>s+t,T>s\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}=\frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}$$

$$=e^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}\ (s>0,t>0)$$

（Ⅱ）由 $F'(t)=f(t)$ 可得概率密度函数

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}\cdot e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ln[L(\theta)]=\ln\left[\prod_{i=1}^{n}f(t_i,\theta)\right]=\ln\left[\prod_{i=1}^{n}\frac{mt_i^{m-1}}{\theta^m}e^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m}\right]=\ln\left[\frac{m^n(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}}{\theta^{mn}}\cdot e^{-\frac{1}{\theta^m}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}\right]$$

$$=n\ln m+(m-1)\ln(t_1t_2\cdots t_n)-mn\ln\theta-\frac{1}{\theta^m}\cdot\sum_{i=1}^{n}t_i^m$$

求导得 $\dfrac{\mathrm{d}\Big(\ln[L(\theta)]\Big)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{mn}{\theta}+m\dfrac{1}{\theta^{m+1}}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m=0$

即 $\dfrac{1}{\theta^m}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m=n$，则解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}$.

阅卷人说》》

此题第一问是概率计算基本题型，考生应掌握分布函数与概率计算的关系，第二问是在第一问的基础上求出对应概率密度函数，按照最大似然估计的解题步骤即可求解. 值得考生注意的是此题构造对数似然函数及求导时，对计算能力有一定要求，整理化简时要确保正确性.