2023 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）

（科目代码：303）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

（1）已知函数 $f\left(x,y\right)=\ln\left(y+\left|x\sin y\right|\right)$，则（　　）

（A）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在　　（B）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在

（C）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)},\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在　　（D）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)},\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在

【答案】（A）

【解析】$f\left(0,1\right)=0$，由偏导数的定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x,1\right)-f\left(0,1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin 1\left|x\right|\right)}{x}=\sin 1\lim_{x\to 0}\frac{\left|x\right|}{x},$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|x\right|}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left|x\right|}{x}=-1$，所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0.1)}$ 不存在，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\lim_{y\to 1}\frac{f\left(0,y\right)-f\left(0,1\right)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y-1}=1$$ ，所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0.1)}$ 存在.

（2）函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},x\le 0\\ \left(x+1\right)\cos x,x>0\end{cases}$ 的一个原函数为（　　）

（A）$F\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right),x\le 0\\ \left(x+1\right)\cos x-\sin x,x>0\end{cases}$　　（B）$F\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1,x\le 0\\ \left(x+1\right)\cos x-\sin x,x>0\end{cases}$

（C）$F\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right),x\le 0\\ \left(x+1\right)\sin x+\cos x,x>0\end{cases}$　　（D）$F\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1,x\le 0\\ \left(x+1\right)\sin x+\cos x,x>0\end{cases}$

【答案】（D）

【解析】当 $x\le 0$ 时，

$$\int f(x)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C_1$$

当 $x>0$ 时，

$$\int f(x)dx=\int(x+1)\cos x dx=\int(x+1)d\sin x=(x+1)\sin x-\int\sin x dx=(x+1)\sin x+\cos x+C_2$$

原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则在 $x=0$ 处

$\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C_1=C_1$，$\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)\sin x+\cos x+C_2=1+C_2$

所以 $C_1=1+C_2$，令 $C_2=C$，则 $C_1=1+C$，故

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+1+C, x\le0\\(x+1)\sin x+\cos x+C, x>0\end{cases},$$

结合选项，令 $C=0$，则 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, x\le0\\(x+1)\sin x+\cos x, x>0\end{cases}$.

（3）已知微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则 a,b 的取值范围为（　　）

（A）$a<0,b>0$　　（B）$a>0,b>0$

（C）$a=0,b>0$　　（D）$a=0,b<0$

【答案】（C）

【解析】微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，当 $\Delta=a^2-4b>0$ 时，特征方程有两个不同的实根 λ_1,λ_2，则 λ_1,λ_2 至少有一个不等于零，若 C_1,C_2 都不为零，则微分方程的解 $y=C_1e^{-\lambda_1x}+C_2e^{-\lambda_2x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界；

当 $\Delta=a^2-4b=0$ 时，特征方程有两个相同的实根，$\lambda_{1,2}=-\dfrac{a}{2}$，

若 $C_2\ne0$，则微分方程的解 $y=C_1e^{-\frac{a}{2}x}+C_2xe^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界；

当 $\Delta=a^2-4b<0$ 时，特征方程的根为 $\lambda_{1,2}=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$，

则通解为 $y=e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right)$，

此时，要使微分方程的解在 $(-\infty,+\infty)$ 有界，则 $a=0$，再由 $\Delta=a^2-4b<0$，知 $b>0$.

（4）已知 $a_n < b_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则"级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛"是"级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛"的（　　）

（A）充分必要条件　　　　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】（A）

【解析】由条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(b_n-a_n\right)$ 为收敛的正项级数，进而绝对收敛；

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则由 $|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|$ 与比较判别法，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛；

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则由 $|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\le|b_n-a_n|+|b_n|$ 与比较判别法，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

（5）设 A,B 为 n 阶可逆矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，M^* 为矩阵 M 的伴随矩阵，则 $\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}^*=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$　　　　（B）$\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$　　　　（D）$\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

【答案】（B）

【解析】结合伴随矩阵的核心公式 $A\cdot A^*=|A|E$，代入（B）选项计算得

$$\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B|AA^* & -AA^*B^*+|A|B^* \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B||A|E & -|A|B^*+|A|B^* \\ O & |A||B|E \end{pmatrix},$$
$$=\begin{pmatrix} |B||A|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix}=|A||B|E_{2n}$$

故（B）正确.

（6）二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_1+x_3\right)^2-4\left(x_2-x_3\right)^2$ 的规范形为（　　）

（A）$y_1^2+y_2^2$　　（B）$y_1^2-y_2^2$　　（C）$y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　（D）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】（B）

【解析】由已知 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$，

则其对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+3 & -4\\ -1 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+7)(\lambda-3)=0$，得$A$的特征值为$3,-7,0$，

故选（B）．

（7）已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，若$\gamma$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，也可由与$\beta_1,\beta_2$线性表示，则$\gamma=$（　　）

（A）$k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$　　（B）$k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$

（C）$k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$　　（D）$k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

【答案】（D）

【解析】设$r=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，则$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0$．

又$(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&-5&0\\3&1&-9&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，

故$-3\alpha_1+\alpha_2-\beta_1+\beta_2=0$，即$(x_1,x_2,y_1,y_2)^T=c(-3,1,-1,1)^T,c\in R$．

所以$r=-c\beta_1+c\beta_2=c(-1,-5,-8)^T=-c(1,5,8)^T=k(1,5,8)^T,k\in R$．

（8）设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则$E(|X-E(X)|)=$　　　　（　　）

（A）$\dfrac{1}{e}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{2}{e}$　　（D）1

【答案】（C）

【解析】由题可知$E(X)=1$，所以$|X-E(X)|=\begin{cases}1, & X=0\\ X-1, & X=1,2,\cdots\end{cases}$，

故$E(|X-E(X)|)=1\cdot P\{|X-E(X)|=1\}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)P\{|X-E(X)|=k-1\}$

$=1\cdot P\{X=0\}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}=1\cdot P\{X=0\}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}-(0-1)P\{X=0\}$

由泊松分布率：$P\{X=0\}=\dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$，得$P\{X=0\}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$，所以

上式$=\frac{1}{e}+E\left(X-1\right)-\left(0-1\right)\frac{1}{e}=\frac{1}{e}+[E\left(X\right)-1]-\left(0-1\right)\frac{1}{e}=\frac{2}{e},$

故选（C）.

（9）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自总体 $N\left(\mu_2,2\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，且两样本相互独立，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，$S_2{}^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$，则（　　）

（A）$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n,m\right)$　　（B）$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$

（C）$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n,m\right)$　　（D）$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$

【答案】（D）

【解析】$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的样本方差 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 的样本方差 $S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$

则 $\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n-1\right)\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2\left(m-1\right)$，两个样本相互独立

所以 $\frac{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}/(n-1)}{\frac{(m-1)S_1^2}{2\sigma^2}/(m-1)}=\frac{S_1^2/\sigma^2}{S_2^2/2\sigma^2}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$ 选 D.

（10）设 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma\left(\sigma>0\right)$ 是未知参数.若 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$ 为 σ 的无偏估计，则 $a=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　（C）$\sqrt{\pi}$　　（D）$\sqrt{2\pi}$

【答案】（A）

【解析】由题可知 $X_1-X_2\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$.

令 $Y=X_1-X_2$，则 Y 的概率密度为

$$f\left(y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\cdot2\sigma^2}}.$$

$$E(|Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\cdot 2\sigma^2}}dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$

$$E\left(a\left|X_1-X_2\right|\right)=aE(|Y|)=a\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

由 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$ 为 σ 的无偏估计，有 $E(\hat{\sigma})=\sigma$，得 $a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.故选(A).

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（11）$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=$__________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-\mathrm{x}\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=x^2\left[2-x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$

$=x^2\left[\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{2}{3}$.

（12）已知函数 $f(x,y)$ 满足 $df(x,y)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}, f(1,1)=\frac{\pi}{4}$，则 $f\left(\sqrt{3},3\right)=$______________.

【答案】$\frac{\pi}{3}$

【解析】由题意可得 $f_x'(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，

则 $f(x,y)=-y\cdot\frac{1}{y}\cdot\arctan\frac{x}{y}+c(y)=-\arctan\frac{x}{y}+c(y)$，

又因为 $f_y'(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，可得 $c'(y)=c$，由 $f(1,1)=\frac{\pi}{4}$ 可得 $c=\frac{\pi}{2}$，

即 $f(x,y)=-\arctan\frac{x}{y}+\frac{\pi}{2}$，

故 $f\left(\sqrt{3},3\right)=\frac{\pi}{3}$.

（13）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$______________.

【答案】$\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$

【解析】令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,，则 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，$s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=s(x)$.

即有 $s''(x)-s(x)=0$，解得 $s(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$.

又由 $s(0)=1$，$s'(0)=0$ 有 $C_1+C_2=1,C_1-C_2=0$ 解得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$.

故 $s(x)=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}$.

（14）设某公司在 t 时刻的资产为 $f(t)$，从 0 时刻到 t 时刻的平均资产等于 $\frac{f(t)}{t}-t$.假设 $f(t)$ 连续且 $f(0)=0$，则 $f(t)=$______________.

【答案】$2e^{t}-2t-2$

【解析】由题意可得方程 $\frac{\int_0^t f(x)dx}{t}=\frac{f(t)}{t}-t$，即 $\int_0^t f(x)dx=f(t)-t^2$.两边同时 t 对求导得 $f(t)=f'(t)-2t$，即 $f'(t)-f(t)=2t$.由一阶线性微分方程通解公式有：

$$f(t)=e^{\int 1dt}\left(\int 2te^{-\int 1dt}dt+C\right)=e^{t}\left(\int 2te^{-t}dt+C\right)=e^{t}\left[-(2t+2)e^{-t}+C\right]=Ce^{t}-2t-2.$$

又由于 $f(0)=0$，则 $C-2=0$，即 $C=2$.故 $f(t)=2e^{t}-2t-2$.

（15）已知线性方程组 $\begin{cases}ax_1+x_3=1\\ x_1+ax_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ ax_1+bx_2=2\end{cases}$ 有解，其中 a,b 为常数，若 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则，

$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$______________.

【答案】8

【解析】由已知 $r(A)=r(A,b)\le 3<4$，故 $|A,b|=0$

$$即|A,b|=\begin{vmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}+2\cdot 4=0$$

故$\begin{vmatrix}1 & a & 1\\1 & 2 & a\\a & b & 0\end{vmatrix}=8$.

（16）设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim B(1,p),Y\sim B(2,p),P\in(0,1)$，则$X+Y$与$X-Y$的相关系数为____________.

【答案】$-\dfrac{1}{3}$

【解析】因为$X\sim B(1,p)$，所以$D(X)=p(1-p)$.

因为$Y\sim B(2,p)$，所以$D(Y)=2p(1-p)$.

$$Cov(X+Y,X-Y)=Cov(X+Y,X)-Cov(X+Y,Y)=Cov(X,X)+Cov(Y,X)-Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)$$
$$=DX-DY=p(1-p)-2p(1-p)=-p(1-p)$$

因为X与Y相互独立，所以

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=3p(1-p),D(X-Y)=D(X)+D(Y)=3p(1-p)$$

故$\rho=\dfrac{Cov(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)D(X-Y)}}=-\dfrac{1}{3}$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

已知可导函数$y=y(x)$满足$ae^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$，且$y(0)=0,y'(0)=0$

（I）求a,b的值.

（II）判断$x=0$是否为函数$y(x)$的极值点.

【解析】（1）在题设方程两边同时对x求导得，

$$ae^x+2y\cdot y'+y'-\frac{\cos y}{1+x}+\ln(1+x)\cdot\sin y\cdot y'=0 \text{ ①}$$

将$x=0,y=0$代入题设方程得，$a+b=0$；

将$x=0,y=0,y'(0)=0$代入①式得，$a-1=0$

综上：$a=1,b=-1$.

（2）在等式①两边再对x求导得，

$$ae^x+2(y')^2+2y\cdot y''+y''-\frac{-\sin y\cdot y'\cdot(1+x)-\cos y}{(1+x)^2}+(\ln(1+x)\cdot\sin y\cdot y')'=0 \text{ ②}$$

将$x=0$，$y=0$，$y'(0)=0$代入②式得，$y''(0)=-a-1=-2$.

由于 $y'(0)=0$，$y''(0)=-2$，故 $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点.

（18）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge1\right\}$，

（I）求平面区域 D 的面积.

（II）求平面区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

【解析】（I）由题设条件可知：

$$S_D=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx\overset{x=\tan t}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin^2 t}dt\ ;$$

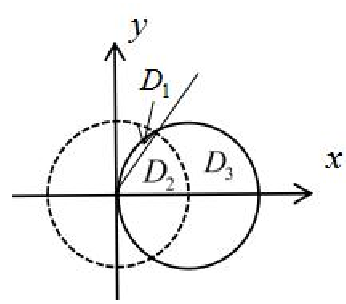
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin^2 t}dt=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\cos^2 t}d\cos t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

（II）旋转体体积 $V=\int_1^{+\infty}\pi y^2dx=\pi\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2(1+x)^2}dx=\pi\int_1^{+\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right]dx=\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+y^2\le1\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|dxdy$.

【解析】先利用被积函数的奇偶和积分区域的对称性化简，再切割积分区域，把积分区域分为三块，分别采用极坐标进行计算（如图）：



$$\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|d\sigma=2\iint\limits_{D_1+D_2+D_3}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+2\iint\limits_{D_2}1--\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+2\iint\limits_{D_3}\sqrt{x^2+y^2}-1d\sigma$$

$$\iint\limits_{D_1}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1 r(1-r)dr=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{18}$$

$$\iint\limits_{D_2}1-\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r(1-r)dr=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta-\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta=\frac{\pi}{6}-\frac{16}{9}+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$\iint\limits_{D_3}\sqrt{x^2+y^2}-1d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}r(r-1)dr=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{8}{3}\cos^3\theta-2\cos^2\theta+\frac{1}{6}d\theta=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$$

分别采用极坐标进行计算：

所以：

$$\iint_D \left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| d\sigma = 2\iint_{D_1} 1+\sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma + 2\iint_{D_2} 1-\sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma + 2\iint_{D_3} \sqrt{x^2+y^2}-1\, d\sigma = -\frac{\pi+32}{9}+3\sqrt{3}$$

（20）（本题满分 12 分）

设函数 $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ 在 $[-a\,a]$ 上具有 2 阶连续倒数，证明：

（I）若 $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$ 使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}\left[f(a)+f(-a)\right]$；

（II）若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$，使得 $\left|f''(\eta)\right|\ge\frac{1}{a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$.

【解析】（1）证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2,\eta$ 介于 0 与 x 之间，则

$f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2,0<\eta_1<a$ ①

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2,-a<\eta_2<0$ ②

①+②得：$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}\left[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right]$ ③

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2,\eta_1]$ 上连续，则必有最大值 M 与最小值 m，即

$m\le f''(\eta_1)\le M$； $m\le f''(\eta_2)\le M$；从而 $m\le\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\le M$；

由介值定理得：存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$，有 $\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$，代入③得：

$f(a)+f(-a)=a^2f''(\xi)$，即 $f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$

（2）证明：设 $f(x)$ 在 $x=x_0\in(-a,a)$ 取极值，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$.

又 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2$，$\gamma$ 介于 0 与 x 之间，

则 $f(-a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2,-a<\gamma_1<0$

$$f(a)=f(x_0)+\frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2,0<\gamma_2<a$$

从而

$$\begin{aligned}\left|f(a)-f(-a)\right| &=\left|\frac{1}{2}(a-x_0)^2f''(\gamma_2)-\frac{1}{2}(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|\\ &\le\frac{1}{2}\left|(a-x_0)^2f''(\gamma_2)\right|+\frac{1}{2}\left|(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|\end{aligned}$$

又$\left|f''(x)\right|$连续，设$M=\max\left\{\left|f''(\gamma_1)\right|,\right\}\left|f''(\gamma_2)\right|$，则

$$\left|f(a)-f(-a)\right|\le\frac{1}{2}M(a+x_0)^2+\frac{1}{2}M(a-x_0)^2=M\left(a^2+x_0{}^2\right)$$

又$x_0\in(-a,a)$，则$\left|f(a)-f(-a)\right|\le M\left(a^2+x_0{}^2\right)\le 2Ma^2$，则$M\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$，

即存在$\eta=\gamma_1$或$\eta=\gamma_2\in(-a,a)$，有$\left|f''(\eta)\right|\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$.

（21）（本题满分 12 分）

设矩阵A满足：对任意x_1,x_2,x_3均有$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$

（I）求A；

（II）求可逆矩阵P与对角矩阵Λ，使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

【解析】（I）因为$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$对任意的$x_1,x_2,x_3$均成立，

所以$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

（II）$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)\left(\lambda^2+2\lambda\right)-2(\lambda+2)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0.$

所以A的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$.

$\lambda_1=-2$时，$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1\\-2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量$\alpha_1=(0,-1,1)^T$；

$\lambda_2=2$时，$\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&3&-1\\0&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量$\alpha_2=(4,3,1)^T$；

$\lambda_3=-1$时，$\lambda_3 E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量$\alpha_3=(1,0,-2)^T$；

令$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}0&4&1\\-1&3&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

设随机变量X的概率密度为$f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2},-\infty<x<+\infty$，令$Y=e^x$.

（I）求X的分布函数；

（II）求Y的概率密度函数；

（III）判断Y的数学期望是否存在.

【解析】

（1）$F_X(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{e^t}{\left(1+e^t\right)^2}dx=-\left.\dfrac{1}{1+e^t}\right|_{-\infty}^{x}=\dfrac{e^x}{1+e^x},x\in R$

（II）$F_Y\left(y\right)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{e^X\le y\right\}$.

当$y<0$时，$F_Y\left(y\right)=0$；

当$y\ge0$时，$F_Y\left(y\right)=P\left\{X\le \ln y\right\}=F\left(\ln y\right)=\dfrac{y}{1+y}$；

所以Y的概率密度为

$$f_y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

（III）$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}\dfrac{y}{(1+y)^2}dy=\left.\left(\ln\left(1+y\right)+\dfrac{1}{1+y}\right)\right|_0^{+\infty}=\infty$，所以不存在.