

2023 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）

（科目代码：302）

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置。

(1) $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程是 ()

(A) $y = x + e$ (B) $y = x + \frac{1}{e}$ (C) $y = x$ (D) $y = x - \frac{1}{e}$

【答案】 (B)

【解析】

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right) - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln\left(e + \frac{1}{x-1}\right) - \ln e \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{e + \frac{1}{x-1}}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \frac{1}{e(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e(x-1)} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

所以斜渐近线方程为 $y = x + \frac{1}{e}$.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x, & x > 0 \end{cases}$ 的一个原函数为 ()

(A) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x), & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\cos x - \sin x, & x > 0 \end{cases}$

$$(C) F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} - x), & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases} \quad (D) F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$$

【答案】 (D)

【解析】 当 $x \leq 0$ 时,

$$\int f(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1$$

当 $x > 0$ 时,

$$\int f(x) dx = \int (x+1)\cos x dx = \int (x+1)d\sin x = (x+1)\sin x - \int \sin x dx = (x+1)\sin x + \cos x + C_2$$

原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则在 $x=0$ 处

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_1 = C_1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)\sin x + \cos x + C_2 = 1 + C_2$$

所以 $C_1 = 1 + C_2$, 令 $C_2 = C$, 则 $C_1 = 1 + C$, 故

$$\int f(x) dx = \begin{cases} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + C, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x + C, & x > 0 \end{cases},$$

结合选项, 令 $C=0$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + 1, & x \leq 0 \\ (x+1)\sin x + \cos x, & x > 0 \end{cases}$.

(3) 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 ()

(A) x_n 是 y_n 的高阶无穷小

(B) y_n 是 x_n 的高阶无穷小

(C) x_n 是 y_n 的等价无穷小

(D) x_n 是 y_n 的同阶但非等价无穷小

【答案】 (B)

【解析】 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中, $\frac{2}{\pi}x < \sin x$, 故 $x_{n+1} = \sin x_n > \frac{2}{\pi}x_n$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \Rightarrow \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} < \frac{2}{2} \cdot \frac{y_n}{x_n} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y_n}{x_n} < \dots < \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{y_1}{x_1} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0.$$

故 y_n 是 x_n 的高阶无穷小.

(4) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则 a, b 的取值范围为 ()

(A) $a < 0, b > 0$

(B) $a > 0, b > 0$

(C) $a = 0, b > 0$

(D) $a = 0, b < 0$

【答案】 (C)

【解析】 微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, 当 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ 时, 特征方程有两个不同的实根 λ_1, λ_2 , 则 λ_1, λ_2 至少有一个不等于零, 若 C_1, C_2 都不为零, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_2 x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b = 0$ 时, 特征方程有两个相同的实根, $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$,

若 $C_2 \neq 0$, 则微分方程的解 $y = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界;

当 $\Delta = a^2 - 4b < 0$ 时, 特征方程的根为 $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}i$,

则通解为 $y = e^{-\frac{a}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}x \right)$,

此时, 要使微分方程的解在 $(-\infty, +\infty)$ 有界, 则 $a = 0$, 再由 $\Delta = a^2 - 4b < 0$, 知 $b > 0$.

(5) 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定, 则 ()

(A) $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在

(B) $f'(0)$ 不存在, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续

(C) $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在

(D) $f''(0)$ 存在, $f''(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续

【答案】 (C)

【解析】 $t \geq 0$ 时, $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \sin t \end{cases}$, 得 $y = \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}$; $t < 0$ 时, $\begin{cases} x = t \\ y = -t \sin t \end{cases}$, 得 $y = -x \sin x$;

综上, $y = \begin{cases} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3}, x \geq 0 \\ -x \sin x, x < 0 \end{cases}$,

从而由 $y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} - 0}{x} = 0, y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \sin x - 0}{x} = 0$, 得 $y'(0) = 0$;

$$\text{于是 } y' = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \text{ 得 } y' \text{ 连续;} \\ -\sin x - x\cos x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{又由 } y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{x}{9}\cos\frac{x}{3} - 0}{x} = \frac{2}{9}, y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x - x\cos x - 0}{x} = -2, \text{ 得 } y''(0) \text{ 不存在.}$$

(6) 若函数 $f(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}} dx$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处取得最小值, 则 $\alpha_0 =$ ()

- (A) $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ (B) $-\ln(\ln 2)$ (C) $-\frac{1}{\ln 2}$ (D) $\ln 2$

【答案】 (A)

$$\text{【解析】 当 } \alpha > 0 \text{ 时 } f(\alpha) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}} dx = -\frac{1}{(\ln x)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{所以令 } f'(\alpha) = -\frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\ln \ln 2}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \ln \ln 2 \right) = 0, \text{ 得 } \alpha_0 = -\frac{1}{\ln \ln 2}.$$

(7) 设函数 $f(x) = (x^2 + a)e^x$, 若 $f(x)$ 没有极值点, 但曲线 $y = f(x)$ 有拐点, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $[0, 1)$ (B) $[1, +\infty)$ (C) $[1, 2)$ (D) $[2, +\infty)$

【答案】 (C)

【解析】 $f(x) = (x^2 + a)e^x$, $f'(x) = (x^2 + a + 2x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 4x + a + 2)e^x$, 由于 $f(x)$ 无极值点, 所以 $4 - 4a \leq 0$, 即 $a \geq 1$; 由于 $f(x)$ 有拐点, 所以 $16 - 4(a + 2) > 0$, 即 $a < 2$; 综上所述 $a \in [1, 2)$.

(8) 设 A, B 为 n 阶可逆矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, M^* 为矩阵 M 的伴随矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix}^* =$ ()

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ 0 & |B|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ 0 & |A|B^* \end{pmatrix}$

【答案】 (D)

【解析】结合伴随矩阵的核心公式 $A \cdot A^* = |A|E$ ，代入 (D) 选项计算得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & E \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} |B|AA^* & -AA^*B^* + |A|B^* \\ O & |A|BB^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B||A|E & -|A|B^* + |A|B^* \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |B||A|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} = |A||B|E_{2n} \end{aligned}$$

故 (D) 正确.

(9) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范形为 ()

(A) $y_1^2 + y_2^2$ (B) $y_1^2 - y_2^2$ (C) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$ (D) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

【答案】(B)

【解析】由已知 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$,

则其对应的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 3 & -4 \\ -1 & -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 7)(\lambda - 3) = 0$, 得 A 的特征值为 $3, -7, 0$

故选 (B).

(10) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示, 也可由 β_1, β_2

线性表示, 则 $\gamma =$ ()

(A) $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in R$

(B) $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in R$

(C) $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in R$

(D) $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in R$

【答案】(D)

【解析】设 $r = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2$, 则 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 - y_1\beta_1 - y_2\beta_2 = 0$.

$$\text{又 } (\alpha_1, \alpha_2, -\beta_1, -\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

故 $-3\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 = 0$, 即 $(x_1, x_2, y_1, y_2)^T = c(-3, 1, -1, 1)^T, c \in R$.

所以 $r = -c\beta_1 + c\beta_2 = c(-1, -5, -8)^T = -c(1, 5, 8)^T = k(1, 5, 8)^T, k \in R$.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab =$ _____.

【答案】 -2

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bx^2 + \ln(1+x)}{e^{x^2} - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + bx^2 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + x^2 + o(x^2) - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]} = 1$, 可得

$a + 1 = 0, b - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 即 $a = -1, b = 2$, 故 $ab = -2$.

(12) 曲线 $y = \int_{-\sqrt{3}}^x \sqrt{3-t^2} dt$ 的弧长为 _____.

【答案】 $\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

【解析】 $y' = \sqrt{3-x^2}$, 由弧长公式可得

$$l = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx \stackrel{x=2\sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi.$$

(13) 设函数 $z = z(x, y)$ 由 $e^z + xz = 2x - y$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} \right|_{(1,1)} =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】 将 $x=1, y=1$ 代入原方程得 $e^z + z = 1 \Rightarrow z = 0$

方程两边同时对 x 求偏导得: $e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z + x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2$ ①

上式两边再同时对 x 求导得: $e^z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + e^z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ ②

将 $x=1, y=1, z=0$ 代入①式得 $e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 0 + \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 1$

代入②式得 $e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 1 + 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3}{2}$.

(14) 曲线 $3x^3 = y^5 + 2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为_____.

【答案】 $-\frac{11}{9}$

【解析】 两边对 x 求导: $9x^2 = 5y^4 \cdot y' + 6y^2 \cdot y'$ ①

当 $x=1$ 时, 代入原方程得 $3 = y^5 + 2y^3 \Rightarrow y=1$

将 $x=1, y=1$ 代入①式得 $9 = 5y' + 6y' \Rightarrow y'|_{(1,1)} = \frac{9}{11}$,

所以曲线在 $x=1$ 处的法线斜率为 $-\frac{11}{9}$.

(15) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) - f(x) = x, \int_0^2 f(x)dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x)dx =$ _____

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$

$= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 f(t+2)dt$ (令 $x=t+2$) $= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x+2)dx$

$= \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 [f(x) + x]dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 xdx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^1 xdx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$

(16) 已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解, 其中 a, b 为常数, 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$, 则,

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$ _____.

【答案】 8

【解析】由已知 $r(A) = r(A, b) \leq 3 < 4$ ，故 $|A, b| = 0$

$$\text{即 } |A, b| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ a & b & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot 4 = 0$$

$$\text{故 } \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设曲线 $L: y = y(x) (x > e)$ 经过点 $(e^2, 0)$ ， L 上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距，

(I) 求 $y(x)$.

(II) 在 L 上求一点，使该点的切线与两坐标轴所围三角形面积最小，并求此最小面积.

【解析】(I) 曲线 L 在点 $P(x, y)$ 处的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$ ，令 $X = 0$ ，则切线在 y 轴上的截距为 $Y = y - xy'$ ，则 $x = y - xy'$ ，即 $y' - \frac{1}{x}y = -1$ ，解得 $y(x) = x(C - \ln x)$ ，其中 C 为任意常数. 又 $y(e^2) = 0$ ，则 $C = 2$ ，故 $y(x) = x(2 - \ln x)$.

(II) 设曲线 L 在点 $(x, x(2 - \ln x))$ 处的切线与两坐标轴所围三角形面积最小，此时切线方程为 $Y - x(2 - \ln x) = (1 - \ln x)(X - x)$.

令 $Y = 0$ ，则 $X = \frac{x}{\ln x - 1}$ ；令 $X = 0$ ，则 $Y = x$.

故切线与两坐标轴所围三角形面积为 $S(x) = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\ln x - 1} \cdot x = \frac{x^2}{2(\ln x - 1)}$,

则 $S'(x) = \frac{x(2\ln x - 3)}{2(\ln x - 1)^2}$. 令 $S'(x) = 0$ ，得驻点 $x = e^{\frac{3}{2}}$.

当 $e < x < e^{\frac{3}{2}}$ 时， $S'(x) < 0$ ；当 $x > e^{\frac{3}{2}}$ 时， $S'(x) > 0$ ，故 $S(x)$ 在 $x = e^{\frac{3}{2}}$ 处取得极小值，同时也取最小值，且最小值为 $S\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = e^3$.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{\cos y} + \frac{x^2}{2}$ 的极值.

【解析】令 $\begin{cases} f'_x = e^{\cos y} + x = 0 \\ f'_y = xe^{\cos y}(-\sin y) = 0 \end{cases}$, 得驻点为: $(-e^{-1}, k\pi)$, 其中 k 为奇数; $(-e, k\pi)$, 其中 k 为偶数.

$$\text{又 } \begin{cases} f''_{xx} = 1 \\ f''_{xy} = e^{\cos y}(-\sin y) \\ f''_{yy} = xe^{\cos y} \sin^2 y + xe^{\cos y}(-\cos y) \end{cases}$$

代入 $(-e^{-1}, k\pi)$, 其中 k 为奇数, 得 $\begin{cases} A = f''_{xx} = 1 \\ B = f''_{xy} = 0 \\ C = f''_{yy} = -e^{-2} \end{cases}$, $AC - B^2 < 0$, 故 $(-e^{-1}, k\pi)$ 不是极值点;

代入 $(-e, k\pi)$, 其中 k 为偶数, 得 $\begin{cases} A = f''_{xx} = 1 \\ B = f''_{xy} = 0 \\ C = f''_{yy} = e^2 \end{cases}$, $AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$, 故 $(-e, k\pi)$ 是极小值点,

$f(-e, k\pi) = -\frac{e^2}{2}$ 为极小值.

(19) (本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1 \right\}$,

(I) 求平面区域 D 的面积.

(II) 求平面区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

【解析】(I) 由题设条件可知:

$$\begin{aligned} S_D &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{x=\tan t}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{\tan t \sec t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt; \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos^2 t} d \cos t = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos t - 1}{\cos t + 1} \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \end{aligned}$$

$$(II) \text{ 旋转体体积 } V = \int_1^{+\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)^2} dx = \pi \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right] dx = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

(20) (本题满分 12 分)

设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $x^2 + y^2 - xy = 1$, $x^2 + y^2 - xy = 2$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$ 围成, 计算 $\iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} dx dy$.

【解析】

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} d\sigma \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \cdot \ln r \Big|_{\sqrt{\frac{1-\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \ln \sqrt{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3 + \tan^2\theta) \cdot \cos^2\theta} d\theta = \ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3 + \tan^2\theta)} d \tan \theta \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \ln 2. \end{aligned}$$

(21) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续导数, 证明:

(I) 若 $f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2} [f(a) + f(-a)]$.

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$, 使得 $|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$.

【解析】(I) 证明: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2!}x^2$, η 介于 0 与 x 之间,

$$\text{则 } f(a) = f'(0)a + \frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2, 0 < \eta_1 < a \quad \textcircled{1}$$

$$f(-a) = f'(0)(-a) + \frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2, -a < \eta_2 < 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得: } f(a) + f(-a) = \frac{a^2}{2} [f''(\eta_1) + f''(\eta_2)] \quad \textcircled{3}$$

又 $f''(x)$ 在 $[\eta_2, \eta_1]$ 上连续, 则必有最大值 M 与最小值 m , 即

$$m \leq f''(\eta_1) \leq M; \quad m \leq f''(\eta_2) \leq M; \quad \text{从而 } m \leq \frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} \leq M;$$

由介值定理得：存在 $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-a, a)$ ，有 $\frac{f''(\eta_1) + f''(\eta_2)}{2} = f''(\xi)$ ，代入③得：

$$f(a) + f(-a) = a^2 f''(\xi), \text{ 即 } f''(\xi) = \frac{f(a) + f(-a)}{a^2}$$

(II) 证明：设 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in (-a, a)$ 取极值，且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导，则 $f'(x_0) = 0$ 。又

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2 = f(x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2!}(x - x_0)^2, \quad \gamma \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间,}$$

$$\text{则 } f(-a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a - x_0)^2, \quad -a < \gamma_1 < 0$$

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f''(\gamma_2)}{2!}(a - x_0)^2, \quad 0 < \gamma_2 < a$$

$$\text{从而 } |f(a) - f(-a)| = \left| \frac{1}{2}(a - x_0)^2 f''(\gamma_2) - \frac{1}{2}(a + x_0)^2 f''(\gamma_1) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} |(a - x_0)^2 f''(\gamma_2)| + \frac{1}{2} |(a + x_0)^2 f''(\gamma_1)|$$

又 $|f''(x)|$ 连续，设 $M = \max\{|f''(\gamma_1)|, |f''(\gamma_2)|\}$ ，则

$$|f(a) - f(-a)| \leq \frac{1}{2} M (a + x_0)^2 + \frac{1}{2} M (a - x_0)^2 = M (a^2 + x_0^2)$$

又 $x_0 \in (-a, a)$ ，则 $|f(a) - f(-a)| \leq M (a^2 + x_0^2) \leq 2Ma^2$ ，

则 $M \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$ ，即存在 $\eta = \gamma_1$ 或 $\eta = \gamma_2 \in (-a, a)$ ，

有 $|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$ 。

(22) (本题满分 12 分)

设矩阵 A 满足：对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

(I) 求 A ；

(II) 求可逆矩阵 P 与对角矩阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

【解析】 (I) 因为 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 对任意的 x_1, x_2, x_3 均成立,

$$\text{所以 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(II) } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda) - 2(\lambda + 2) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

$$\lambda_1 = -2 \text{ 时, } \lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得特征向量 } \alpha_1 = (0, -1, 1)^T;$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ 时, } \lambda_2 E - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得特征向量 } \alpha_2 = (4, 3, 1)^T;$$

$$\lambda_3 = -1 \text{ 时, } \lambda_3 E - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得特征向量 } \alpha_3 = (1, 0, -2)^T;$$

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$