2023 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）

（科目代码：301）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

（1）曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的渐近线方程为　　　　（　　）

（A）$y=x+e$　　（B）$y=x+\dfrac{1}{e}$　　（C）$y=x$　　（D）$y=x-\dfrac{1}{e}$

【答案】（B）

【解析】

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-1\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-\ln e\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\frac{e+\frac{1}{x-1}}{e}\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{e(x-1)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e(x-1)}=\frac{1}{e}$$

所以斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{1}{e}$.

（2）若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，则　　　　（　　）

（A）$a<0,b>0$　　（B）$a>0,b>0$

（C）$a=0,b>0$　　（D）$a=0,b<0$

【答案】（C）

【解析】微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，当 $\Delta=a^2-4b>0$ 时，特征方程有两个不同的实根 λ_1,λ_2，则 λ_1,λ_2 至少有一个不等于零，若 C_1,C_2 都不为零，则微分方

程的解 $y=C_1e^{-\lambda_1 x}+C_2e^{-\lambda_2 x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界；

当 $\Delta=a^2-4b=0$ 时，特征方程有两个相同的实根，$\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}$，

若 $C_2\neq 0$，则微分方程的解 $y=C_1e^{-\frac{a}{2}x}+C_2xe^{-\frac{a}{2}x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界；

当 $\Delta=a^2-4b<0$ 时，特征方程的根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$，

则通解为 $y=e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right)$，

此时，要使微分方程的解在 $(-\infty,+\infty)$ 有界，则 $a=0$，再由 $\Delta=a^2-4b<0$，知 $b>0$.

（3）设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则（　　）

（A）$f(x)$ 连续，$f'(0)$ 不存在

（B）$f'(0)$ 存在，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

（C）$f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在

（D）$f''(0)$ 存在，$f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

【答案】（C）

【解析】$t\geq 0$ 时，$\begin{cases}x=3t\\ y=t\sin t\end{cases}$，得 $y=\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$；$t<0$ 时，$\begin{cases}x=t\\ y=-t\sin t\end{cases}$，得 $y=-x\sin x$；

综上，$y=\begin{cases}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3},x\geq 0\\ -x\sin x,x<0\end{cases}$，

从而由 $y'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}-0}{x}=0,y'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x\sin x-0}{x}=0$，得 $y'(0)=0$；

于是 $y'=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3},x>0\\ 0\qquad ,x=0,\text{得 } y' \text{ 连续；}\\ -\sin x-x\cos x\qquad ,x<0\end{cases}$

又由 $y''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}-0}{x}=\frac{2}{9},y''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin x-x\cos x-0}{x}=-2$，得 $y''(0)$ 不存在.

（4）已知 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛的”（　　）

（A）充分必要条件　　　　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】（A）

【解析】由条件知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-a_n\right)$为收敛的正项级数，进而绝对收敛；

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则由$|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\le|b_n-a_n|+|a_n|$,由比较判别法，得$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛；

设$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，则由$|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\le|b_n-a_n|+|b_n|$，由比较判别法，得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.

（5）已知n阶矩阵A,B,C满足$ABC=0,E$为n阶单位矩阵，记矩阵$\begin{pmatrix}0 & A\\ BC & E\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}AB & C\\ 0 & E\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}E & AB\\ AB & 0\end{pmatrix}$的秩分别为$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，则　　　　（　　）

（A）$\gamma_1\le\gamma_2\le\gamma_3$　　　　（B）$\gamma_1\le\gamma_3\le\gamma_2$

（C）$\gamma_3\le\gamma_1\le\gamma_2$　　　　（D）$\gamma_2\le\gamma_1\le\gamma_3$

【答案】（B）

【解析】因初等变换不改变矩阵的秩，

$$r_1=r\begin{pmatrix}0 & A\\ BC & E\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-ABC & 0\\ BC & E\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}0 & 0\\ BC & E\end{pmatrix}=n,$$

$$r_2=r\begin{pmatrix}AB & C\\ 0 & E\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}=r\left(AB\right)+n,$$

$$r_3=r\begin{pmatrix}E & AB\\ AB & 0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E & 0\\ AB & -ABAB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & -ABAB\end{pmatrix}=r\left(ABAB\right)+n,$$

由矩阵秩的性质：$r\left(ABAB\right)\le r(AB)$，故选（B）.

（6）下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是　　　　（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 2 & 0\\ a & 0 & 3\end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

【答案】（D）

【解析】选项（A）矩阵有三个不同特征值，所以必可相似对角化；

选项（B）矩阵为实对称矩阵，所以必可相似对角化；

选项（C）矩阵特征值为$1,2,2$，二重特征值的重数$2=3-r\left(C-2E\right)$，所以必可相似对角化；

选项（D）矩阵特征值为$1,2,2$，二重特征值的重数$2\ne3-r\left(D-2E\right)$，所以不可相似对角化.

故选（D）.

（7）已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，若$\gamma$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，也可由$\beta_1,\beta_2$线性表示，则$\gamma=$（　　）

（A）$k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$　　（B）$k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$

（C）$k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$　　（D）$k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

【答案】（D）

【解析】设$r=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，则$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0$.

又$\left(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2\right)=\begin{pmatrix}1&2&-2&-1\\2&1&-5&0\\3&1&-9&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，

故$-3\alpha_1+\alpha_2-\beta_1+\beta_2=0,$即$\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)^T=c(-3,1,-1,1)^T,c\in R$.

所以$r=-c\beta_1+c\beta_2=c(-1,-5,-8)^T=-c(1,5,8)^T=k(1,5,8)^T,k\in R$.

（8）设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则$E\left(\left|X-E(X)\right|\right)=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{e}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{2}{e}$　　（D）1

【答案】（C）

【解析】由题可知$E\left(X\right)=1$，所以$\left|X-E(X)\right|=\begin{cases}1, & X=0\\ X-1, & X=1,2,\cdots\end{cases}$，

故$E(|X-E(X)|)=1\cdot P\{|X-E(X)|=1\}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)P\{|X-E(X)|=k-1\}$

$=1\cdot P\{X=0\}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}=1\cdot P\{X=0\}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k-1)P\{X=k\}-(0-1)P\{X=0\}$

由泊松分布率：$P\{X=0\}=\dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda},$得$P\{X=0\}=e^{-1}=\dfrac{1}{e},$所以

上式$=\dfrac{1}{e}+E\left(X-1\right)-\left(0-1\right)\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}+[E\left(X\right)-1]-\left(0-1\right)\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e},$

故选（C）.

（9）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N\left(\mu_1,\sigma^2\right)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N\left(\mu_2,2\sigma^2\right)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{Y}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}Y_i$，

$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，$S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$，则（　　）

（A）$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n,m\right)$　　（B）$\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$

（C）$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n,m\right)$　　（D）$\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$

【答案】（D）

【解析】$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的样本方差 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，

$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 的样本方差 $S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$，则 $\frac{\left(n-1\right)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2\left(n-1\right)$，$\frac{\left(m-1\right)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2\left(m-1\right)$，

两个样本相互独立，所以 $\dfrac{\dfrac{\frac{\left(n-1\right)S_1^2}{\sigma^2}}{n-1}}{\dfrac{\frac{\left(m-1\right)S_2^2}{2\sigma^2}}{m-1}}=\dfrac{\frac{S_1^2}{\sigma^2}}{\frac{S_2^2}{2\sigma^2}}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F\left(n-1,m-1\right)$，故选（D）.

（10）设 X_1,X_2 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其中 $\sigma\left(\sigma>0\right)$ 是未知参数.若 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$ 为 σ 的无偏估计，则 $a=$（　　）

（A）$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　（C）$\sqrt{\pi}$　　（D）$\sqrt{2\pi}$

【答案】（A）

【解析】由题可知 $X_1-X_2\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$.

令 $Y=X_1-X_2$，则 Y 的概率密度为
$$f\left(y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\cdot2\sigma^2}}.$$

$$E(|Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\cdot2\sigma^2}}dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma}\int_0^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}},$$
$$E\left(a\left|X_1-X_2\right|\right)=aE(|Y|)=a\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

由 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|)$ 为 σ 的无偏估计，有 $E\left(\hat{\sigma}\right)=\sigma$，得 $a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.故选$\left(\text{A}\right)$.

二、填空题：11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（11）当 $x\to0$ 时，函数 $f\left(x\right)=ax+bx^2+\ln\left(1+x\right)$ 与 $g\left(x\right)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$__________.

【答案】-2

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+bx^2+\ln(1+x)}{e^{x^2}-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+bx^2+x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x^2+o(x^2)-\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}=1$，可得

$a+1=0,b-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，即 $a=-1,b=2$，故 $ab=-2$.

（12）曲面 $z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为__________

【答案】$x+2y-z=0$

【解析】$F(x,y,z)=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)-z$，

$\mathbf{n}=\left(F_x',F_y',F_z'\right)=\left(1+\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},2+\dfrac{2y}{1+x^2+y^2},-1\right)$,

即在点 $(0,0,0)$ 处的法向量为 $(1,2,-1)$，即切平面方程为 $x+2y-z=0$.

（13）设 $f(x)$ 为周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x,x\in[0,1]$，若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$__________.

【答案】0

【解析】由 $f(x)$ 展开为余弦级数知，$f(x)$ 为偶函数.由傅里叶系数计算公式有

$$\begin{aligned}a_n&=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi x dx=2\left(\int_0^1\cos n\pi x dx-\int_0^1 x\cos n\pi x dx\right)\\&=2\left(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 x d\sin n\pi x\right)=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x d\sin n\pi x\\&=\frac{-2}{n\pi}\left(x\sin n\pi x\Big|_0^1-\int_0^1\sin n\pi x dx\right)=\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x dx\\&=\frac{-2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{-2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\end{aligned}$$

故 $a_{2n}=\dfrac{-1}{2n^2\pi^2}(\cos 2n\pi-1)=\dfrac{-1}{2n^2\pi^2}(1-1)=0$.

（14）设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)-f(x)=x,\int_0^2 f(x)dx=0$，则 $\int_1^3 f(x)dx=$__________

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(t+2)dt\,(令 x=t+2)$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x+2)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1\left[f(x)+x\right]dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xdx$

$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 xdx=\int_0^1 xdx=\dfrac{1}{2}$

（15）已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，若 $\gamma^T\alpha_i=\beta^T\alpha_i(i=1,2,3)$，则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$____________.

【答案】$\dfrac{11}{9}$

【解析】

$\gamma^T\alpha_1=\beta^T\alpha_1=1\Rightarrow k_1\alpha_1^T\alpha_1+k_2\alpha_2^T\alpha_1+k_3\alpha_3^T\alpha_1=1\Rightarrow k_1\cdot 3+k_2\cdot 0+k_3\cdot 0=1\Rightarrow k_1=\dfrac{1}{3}.$

同理 $k_2=-1,k_3=-\dfrac{1}{3}$.

所以，$k_1^2+k_2^2+k_3^2=\dfrac{11}{9}$.

（16）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim B\left(1,\dfrac{1}{3}\right),Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 则 $P\{X=Y\}=$____________.

【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】因为 $X\sim B\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$，所以 $X=0,1$； $Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $Y=0,1,2$.

又因为 X 与 Y 相互独立，所以

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{2}{3}C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,2)$，该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

（I）求 $y(x)$；

（II）求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

【解析】（I）设点 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，故切线在 y 轴的截距为 $y-y'x$，则 $x=y-y'x$，

解得 $y=x(C-\ln x)$，其中 C 为任意常数.

由 $y(1)=C=2$，故 $y(x)=x(2-\ln x)$.

（II）由（I）知 $f(x)=\int_1^x t(2-\ln t)dt$，故 $f'(x)=x(2-\ln x)=0$，则驻点为 $x=e^2$.

当 $0<x<e^2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e^2$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $x=e^2$ 处取得极大值，同时也取得最大值，且最大值为 $f(e^2)=\int_1^{e^2} x(2-\ln x)dx=\frac{1}{4}e^4-\frac{5}{4}$.

（18）（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

【解析】$\begin{cases} f_x'=-x(2y+3xy-5x^3)=0 \\ f_y'=2y-x^2-x^3=0 \end{cases}$，得驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$.

$f''_{xx}=-(2y+3xy-5x^3)-x(3y-15x^2)$，$f''_{xy}=-x(2+3x), f''_{yy}=2$.

代入 $(0,0)$，$\begin{cases} A=f''_{xx}=0 \\ B=f''_{xy}=0, \\ C=f''_{yy}=2 \end{cases}$ 则 $AC-B^2=0$，故充分条件失效，当 $x\to 0$ 时，取 $y=x^2+kx^3(k>0)$，

$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)=kx^3\left[x^2+(k-1)x^3\right]=kx^5+o(x^5)$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^5+o(x^5)}{x^5}=k>0$，由极限的局部保号性：存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)$ 时，

$\frac{f(x,y)}{x^5}>0$，$f(x,y)<0=f(0,0)$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\frac{f(x,y)}{x^5}>0$，$f(x,y)>0=f(0,0)$，故 $(0,0)$ 不是极值点；

代入 $(1,1)$，$\begin{cases} A=f''_{xx}=12 \\ B=f''_{xy}=-5, \\ C=f''_{yy}=2 \end{cases}$ 则 $AC-B^2<0$，故 $(1,1)$ 不是极值点；

代入 $\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$ 的 $\begin{cases} A=f''_{xx}=\frac{100}{27} \\ B=f''_{xy}=-\frac{8}{3} \\ C=f''_{yy}=2 \end{cases}$，则 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$，故 $\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$ 是极小值点；

故 $f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)=-\frac{4}{729}$ 为极小值.

（19）（本题满分 12 分）

已知空间有界闭区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$、平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成，Σ 为 Ω 边界的外侧，计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+z\cos ydzdx+yz\sin xdxdy$.

【解析】由高斯公式可得：

$$I=\oiint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+z\cos ydzdx+yz\sin xdxdy \ =\iiint\limits_{\Omega}(2z-z\sin y+y\sin x)dV$$

由于Ω关于xoz坐标面对称，$-z\sin y+y\sin x$是关于y的奇函数，因此

$\iiint\limits_{\Omega}(-z\sin y+y\sin x)dV=0$故

$$I=2\iiint\limits_{\Omega}zdV=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_0^{1-x}zdz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-2x+x^2)dxdy$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy \quad I=\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

（20）（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有二阶连续导数，证明：

（I）若$f(x)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}\left[f(a)+f(-a)\right]$；

（II）若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$使得

$\left|f''(\eta)\right|\ge\frac{1}{2a^2}\left|f(a)-f(-a)\right|$.

【解析】（I）证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$，$\eta$介于 0 与$x$之间，则$f(a)=f'(0)a+\frac{f''(\eta_1)}{2!}a^2, 0<\eta_1<a$.①

$f(-a)=f'(0)(-a)+\frac{f''(\eta_2)}{2!}a^2, -a<\eta_2<0$. ②

①+②得：$f(a)+f(-a)=\frac{a^2}{2}\left[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right]$.③

又$f''(x)$在$[\eta_2,\eta_1]$上连续，则必有最大值M与最小值m，即

$m\le f''(\eta_1)\le M, m\le f''(\eta_2)\le M$，从而$m\le\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\le M$.

由介值定理得：存在$\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-a,a)$，有$\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi)$，

代入③得：$f(a)+f(-a)=a^2f''(\xi)$，即$f''(\xi)=\frac{f(a)+f(-a)}{a^2}$.

（II）设$f(x)$在$x=x_0\in(-a,a)$取极值，且$f(x)$在$x=x_0$可导，则$f'(x_0)=0$.

又$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-x_0)^2$，$\gamma$介于 0 与$x$之间，

则 $f(-a)=f(x_0)+\dfrac{f''(\gamma_1)}{2!}(-a-x_0)^2,-a<\gamma_1<0$.

$f(a)=f(x_0)+\dfrac{f''(\gamma_2)}{2!}(a-x_0)^2,0<\gamma_2<a$.

从而 $|f(a)-f(-a)|=\left|\dfrac{1}{2}(a-x_0)^2f''(\gamma_2)-\dfrac{1}{2}(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$

$\le\dfrac{1}{2}\left|(a-x_0)^2f''(\gamma_2)\right|+\dfrac{1}{2}\left|(a+x_0)^2f''(\gamma_1)\right|$.

又 $|f''(x)|$ 连续，设 $M=\max\{|f''(\gamma_1)|,\}|f''(\gamma_2)|$，

则 $|f(a)-f(-a)|\le\dfrac{1}{2}M(a+x_0)^2+\dfrac{1}{2}M(a-x_0)^2=M(a^2+x_0^2)$

又 $x_0\in(-a,a)$，则 $|f(a)-f(-a)|\le M(a^2+x_0^2)\le 2Ma^2$，

则 $M\ge\dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$，即存在 $\eta=\gamma_1$ 或 $\eta=\gamma_2\in(-a,a)$，

有 $|f''(\eta)|\ge\dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

（21）（本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$，

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$

（I）求可逆变换 $x=Py$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$；

（II）是否存在正交变换 $x=Qy$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$.

【解析】（I）利用配方法将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 和 $g(y_1,y_2,y_3)$ 化为规范形，从而建立两者的关系.

先将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为规范形.

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2$

令 $\begin{cases}z_1=x_1+x_2-x_3\\z_2=x_2+x_3\\z_3=x_3\end{cases}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$.

即 $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，使得 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$.

再将 $g(y_1,y_2,y_3)$ 化为规范形.

$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3=y_1^2+(y_2+y_3)^2$

令$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3, \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 则$g\left(y_1, y_2, y_3\right) = z_1^2 + z_2^2$.

即$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，使得$g\left(y_1, y_2, y_3\right) = z_1^2 + z_2^2$.

从而有$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，

于是可得$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，其中$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$为所求矩阵，

可将$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$化为$g\left(y_1, y_2, y_3\right)$.

（II）二次型$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$和$g\left(y_1, y_2, y_3\right)$的矩阵分别为$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

由题意知，若存在正交变换$x = Qy$，则$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = B$，可得A和B相似.易知$\operatorname{tr}\left(A\right) = 5, \operatorname{tr}\left(B\right) = 3$，即$A$和$B$具有不同的特征值，从而$A$和$B$不相似，于是不存在正交变换$x = Qy$，使得$f\left(x_1, x_2, x_3\right)$化为$g\left(y_1, y_2, y_3\right)$.

（22）（本题满分 12 分）

设二维随机变量$\left(X, Y\right)$的概率密度为

$$f\left(x, y\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(x^2 + y^2\right), & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & ,\text{其它} \end{cases}$$

（I）求X与Y的协方差；

（II）判断X与Y是否相互独立；

（III）求$Z = X^2 + Y^2$的概率密度函数.

【解析】（I）由题意可得，X, Y的边缘密度分别为：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2)dy, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\left[x^2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right], & -1 \le x \le 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)dx, & -1\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\left[y^2\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right], & -1\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy(x^2+y^2)dxdy=0$$

$E(X)=\int_{-1}^{1}\frac{4}{\pi}\left[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx=0$，$E(Y)=\int_{-1}^{1}\frac{4}{\pi}\left[y^2\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\right]dy=0$

所以$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\cdot 0=0$.

（II）由第（I）中边缘密度的结构，可知$f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以X与Y不相互独立.

（III）设$Z=X^2+Y^2$的分布函数为$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X^2+Y^2\le z\}$

当$z<0$时，$F_z(z)=0$；

当$0\le z<1$时，

$$F_z(z)=P\{X^2+Y^2\le z\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{2}{\pi}(x^2+y^2)d\sigma=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}r^3dr=z^2;$$

当$z\ge 1$时，$F_z(z)=1$；

综上：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^2, & 0\le z<1\\ 1, & 1\le z\end{cases}$

所以，z的概率密度为$f_z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.