2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）

（科目代码：303）

一、选择题：1~10 题，每小题 5 分，共 50 分.

（1）当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题

① 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

② 若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③ 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④ 若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中正确的序号是（　　）

A：①②；　B：①④；　C：①③④；　D：②③④.

（2）已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\{a_n\}$（　　）

A：有最大值，有最小值；　　B：有最大值，没有最小值；

C：没有最大值，有最小值；　　D：没有最大值，没有最小值.

（3）设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$，则（　　）

A：$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$；　　B：$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$；

C：$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$；　　D：$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

（4）已知 $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+\sin x}dx$，则（　　）

A：$I_1<I_2<I_3$；　B：$I_2<I_1<I_3$；　C：$I_1<I_3<I_2$；　D：$I_3<I_2<I_1$.

（5）设 A 为3阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 的特征值为 $-1,1,0$ 的充分必要条件是（　　）

A：存在可逆矩阵 P,Q，使得 $A=P\Lambda Q$；　　B：存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$；

C：存在正交矩阵Q，使得$A=Q\Lambda Q^{-1}$ ；　　　D：存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{T}$；

（6）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组$Ax=b$解的情况为（　）

A：无解；　　B: 有解；　　C:有无穷多解或无解 ；　　D: 有唯一解或无解；

（7）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围（　）

A：$\{0,1\}$ ；　　B:$\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$；

C:$\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$ ；　　D:$\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$.

（8）随机变量$X\sim N(0,4)$，随机变量$Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，且$X$与$Y$不相关，则$D(X-3Y+1)=$（　）

A:　2；　B:　4；　C:　6；　D:　10.

（9）设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$独立同分布，且$X_i$的概率密度为$f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & 其他\end{cases}$则当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于（　）

A:$\frac{1}{8}$；　B: $\frac{1}{6}$；　C: $\frac{1}{3}$；　D: $\frac{1}{2}$.

（10）设二维随机变量(X,Y)的概率分布

X \ Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件$A=\{\max\{X,Y\}=2\}$与事件$B=\{\min\{X,Y\}=1\}$相互独立，则$Cov(X,Y)=$（　）

A：-0.6 ；　　B: -0.36；　　C: 0；　　D: 0.48.

二、填空题：11~16 题，每题 5 分，共 30 分.

（11）若$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$__________.

（12）$\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx =$__________.

（13）已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$________.

（14）已知 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=$________.

（15）设 A 为 3 阶矩阵，交换 A 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵

$B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $tr(A^{-1})=$____________.

（16）设 A,B,C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=$__________ .

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

（18）（本题满分 12 分）

设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定，生产函数为 $Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价 P 与 Q 的关系为 $P=1160-1.5Q$，若单位资本投入量和单位蓝洞投入量的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid y-2\le x\le\sqrt{4-y^2}\ ,0\le y\le 2\}$，计算 $I=\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

（20）（本题满分 12 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

（21）（本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

（1）求正交变换 $x=Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（2）证明：$\min\limits_{x\ne 0}\frac{f(x)}{x^Tx}=2$.

（22）（本题 12 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体 X 的简单随机样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体 Y 的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta > 0)$ 是未知参数，利用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题解析

一、选择题：1~10 题，每小题 5 分，共 50 分.

（1）当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$；

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$；

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

其中正确的序号是（　　）

A：①②；　B：①④；　C：①③④；　D：②③④.

【答案】C.

【解析】 当 $x \to 0$ 时，若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^2 = 1$，即 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 1-1=0$，故 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$.所以①③正确.

当 $x \to 0$ 时，$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)} = 1$，此时 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \pm 1$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = -1$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不是等价无穷小，故 ②不正确.

当 $x \to 0$ 时，若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x) - o(\alpha(x))} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$，所以 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，④正确.

综上，C 为选项.

（2）已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则 $\{a_n\}$（　　）

A：有最大值，有最小值；　　B：有最大值，没有最小值；

C：没有最大值，有最小值；　　D：没有最大值，没有最小值.

【答案】A.

【解析】$a_1 = 2 > 1$，$a_2 = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2} < 1$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$，故存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，$a_2 < a_n < a_1$，所以 $\{a_n\}$ 有最大值和最小值，选项 A 正确.

（3）设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$，则（　　）

A：$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$；　　B：$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$；

C：$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$；　　D：$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

【答案】C.

【解析】$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt=(x-y)\int_0^{x-y}f(t)dt-\int_0^{x-y}tf(t)dt$，

$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)dt+(x-y)f(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)dt$，$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y)$，

同理 $\frac{\partial F}{\partial y}=-\int_0^{x-y}f(t)dt-(x-y)f(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)dt$，$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y)$，

综上 $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$，选项 C 正确.

（4）已知 $I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx,I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx,I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$，则（　　）

A：$I_1<I_2<I_3$；　B：$I_2<I_1<I_3$；　C：$I_1<I_3<I_2$；　D：$I_3<I_2<I_1$.

【答案】A.

【解析】$I_1=\int_0^1\frac{\frac{x}{2}}{(1+\cos x)}dx,I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx,I_3=\int_0^1\frac{x}{\frac{1+\sin x}{2}}dx$，先比较 I_1,I_2 的大小，令

$f(x)=\frac{x}{2}-\ln(1+x)\ x\in(0,1)$，此时 $f(0)=0$，此时 $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}<0$，即 $f(x)$ 单调递减，

从而 $f(x)<f(0)=0$，可得 $\frac{x}{2}$《$\ln(1+x)\ x\in(0,1)$，从而 $I_1<I_2$.

再比较 I_3,I_2 的大小，因 $\ln(1+x)<x,\frac{1+\sin x}{2}<1+\cos x,x\in(0,1)$，则 $\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\frac{x}{\frac{1+\sin x}{2}}$，从而

$I_3>I_2$.综上，可得 A 正确.

（5）设 A 为3阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 的特征值为 $-1,1,0$ 的充分必要条件是（　　）

A：存在可逆矩阵 P,Q，使得 $A=P\Lambda Q$；　　B：存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$；

C：存在正交矩阵Q，使得$A=Q\Lambda Q^{-1}$ ；　　　D：存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{T}$；

【答案】B

【解析】3 阶A有$-1,1,0$三个不同的特征值，所以A可以相似对角化，故存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{-1}$；若存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{-1}$，即A相似与Λ，而相似矩阵具有相同的特征值，而Λ的特征值为$1,-1,0$，故A的特征值为$-1,1,0$.因此选 B.

（6）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组$Ax=b$解的情况为（　）

A：无解；　　B: 有解；　　C:有无穷多解或无解 ；　　D: 有唯一解或无解；

【答案】D.

【解析】$(A\,|\,b)\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&a^2-1&1\\0&b-1&b^2-1&3\end{pmatrix}$

（1）当$a=1$或$b=1$时，$r(A)\neq r(A\,|\,b)$，方程无解

（2）当$a\neq 1$且$b\neq 1$时，$(A\,|\,b)\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a+1&\dfrac{1}{a-1}\\0&1&b+1&\dfrac{3}{b-1}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a+1&\dfrac{1}{a-1}\\0&0&b-a&\dfrac{3}{b-1}-\dfrac{1}{a-1}\end{pmatrix}$

（i）当$a\neq b$时，$r(A)=r(A\,|\,b)=3$，方程有唯一解

（ii）当$a=b$时，$r(A)=2$，$r(A\,|\,b)=3$，方程无解；

综述：方程有唯一解或无解，选 D.

（7）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围（　）

A：$\{0,1\}$ ；　　B: $\{\lambda\,|\,\lambda\in R,\lambda\neq -2\}$；

C: $\{\lambda\,|\,\lambda\in R,\lambda\neq -1,\lambda\neq -2\}$ ；　　D: $\{\lambda\,|\,\lambda\in R,\lambda\neq -1\}$.

【答案】C

【解析】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价的充要条件是

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$，而$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,,\alpha_4)$

$$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1-\lambda^2&1-\lambda&0\\1-\lambda&1-\lambda^2&0&\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$$

（1）当 $\lambda=1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=1$，此时向量组等价

（2）当 $\lambda\neq1$ 时

$$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1+\lambda&1&0\\1&1+\lambda&0&-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1+\lambda&1&0\\0&1&-1&-\lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1&-1&-\lambda-1\\0&0&2+\lambda&(1+\lambda)^2\end{pmatrix}$$

（i）当 $\lambda=-2$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组不等价

（ii）当 $\lambda\neq-2,\lambda=-1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=2$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组不等价

（iii）当 $\lambda\neq-2,\lambda\neq-1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组等价

综上，当 $\lambda\neq-2,\lambda\neq-1$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 等价；选 C

（8）随机变量 $X\sim N(0,4)$，随机变量 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，且 X 与 Y 不相关，则 $D(X-3Y+1)=$（　　）

A: 2；　B: 4；　C: 6；　D: 10.

【答案】D.

【解析】由题意知，$D(X)=4,D(Y)=\frac{2}{3}$，$Cov(X,Y)=0$；

$D(X-3Y+1)=D(X-3Y)=D(X)+9D(Y)=10$，故选 D.

（9）设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 独立同分布，且 X_i 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & 其他\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于（　　）

A: $\frac{1}{8}$；　B: $\frac{1}{6}$；　C: $\frac{1}{3}$；　D: $\frac{1}{2}$.

【答案】B.

【解析】$E(X_i^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2(1-|x|)dx=2\int_0^1x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$，从而

$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{6}$，由辛钦大数定律可得，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$，从而选 B.

（10）设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布

X Y	0	1	2
-1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件 $A=\{\max\{X,Y\}=2\}$ 与事件 $B=\{\min\{X,Y\}=1\}$ 相互独立，则 $Cov(X,Y)=$（　　）

A：-0.6 ；　　B: -0.36；　　C: 0；　　D: 0.48.

【答案】B.

【解析】$P(A)=0.1+b,P(B)=0.2,P(AB)=P\{X=1,Y=2\}=0.1$，由 A,B 相互独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)$，解得 $b=0.4$，由分布律的性质得 $a=0.2$，$E(X)=-0.2,E(Y)=1.2,E(XY)=-0.6$

从而 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.36$，故选 B.

二、填空题：11~16 题，每题 5 分，共 30 分.

（11）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$__________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot x\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\tan x}}=e^{\frac{1}{2}}$.

（12）$\displaystyle\int_0^2\frac{2x-4}{x^2+2x+4}dx=$__________.

【答案】$\ln 3-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

【解析】原式 $\displaystyle=\int_0^2\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx-6\int_0^2\frac{1}{x^2+2x+4}dx=\int_0^2\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}-6\int_0^2\frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2}dx$

$=\ln(x^2+2x+4)\big|_0^2-\dfrac{6}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\big|_0^2=\ln 3-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

（13）已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$________.

【答案】0.

【解析】方法一：$f'(x)=\cos xe^{\sin x}-\cos xe^{-\sin x}$，

$f''(x)=(\cos^2 x-\sin x)e^{\sin x}+(\cos^2 x+\sin x)e^{-\sin x}$，

$$\begin{aligned}f'''(x)=&(-2\cos x\sin x-\cos x)e^{\sin x}+\cos x(\cos^2 x-\sin x)e^{\sin x}\\&-\cos x(\cos^2 x+\sin x)e^{-\sin x}+e^{-\sin x}(-2\cos x\sin x+\cos x)\end{aligned}$$

从而 $f'''(2\pi)=1-1-1+1=0$.

方法二：$f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，显然 $f(-x)=e^{-\sin x}+e^{\sin x}=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数，且周期 $T=2\pi$，于是 $f'(x)$ 为奇函数，$f''(x)$ 为偶函数，$f'''(x)$ 为奇函数，从而 $f'''(0)=0$，而 $f'''(2\pi)=f'''(0)=0$.

（14）已知 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)dy=$________.

【答案】$(e-1)^2$.

【解析】记 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y-x\le 1\}$，原式 $=\iint\limits_D f(x)f(y-x)dxdy=\iint\limits_D e^x e^{y-x}dxdy$，

$=\int_0^1 e^x dx\int_x^{x+1}e^{y-x}dy=\int_0^1 e^x(e-1)dy=(e-1)^2$.

（15）设 A 为 3 阶矩阵，交换 A 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵 $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $tr(A^{-1})=$____________.

【答案】-1.

【解析】令 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $P_1AP_2=B$

$$A=P_1^{-1}BP_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & -1\\ -1 & -\lambda & 0\\ 0 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$，解得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i$

故 A^{-1} 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-i,\lambda_3=i$，从而 $tr(A^{-1})=-1$

（16）设 A,B,C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=$__________ .

【答案】$\frac{5}{8}$.

【解析】$P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=\dfrac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)=\dfrac{5}{9}$

$P\left(A\cup B\cup C\right)=P(A)+P(B\cup C)-P(A(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)=\dfrac{8}{9}$

从而 $P(B\cup C\mid A\cup B\cup C)=\dfrac{5}{8}$.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

【解析】 $y(x)=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}[\int(2+\sqrt{x})e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx+C]=e^{-\sqrt{x}}[\int(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx+C]=e^{-\sqrt{x}}[2xe^{\sqrt{x}}+C]$

$=2x+Ce^{-\sqrt{x}}$，其中 C 为任意常数，又 $y(1)=3$，得 $C=e$，即 $y(x)=2x+e^{1-\sqrt{x}}$.

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+e^{1-\sqrt{x}}}{x}=2$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-\sqrt{x}}=0$，故 $y=2x$ 为曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线.

（18）（本题满分 12 分）

设某产品的产量 Q 由资本投入量 x 和劳动投入量 y 决定，生产函数为 $Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价 P 与 Q 的关系为 $P=1160-1.5Q$，若单位资本投入量和单位蓝洞投入量的价格分别为 6 和 8，求利润最大时的产量.

【解析】利润 $L=PQ-6x-8y=(1160-1.6Q)Q-6x-8y=13920x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-216xy^{\frac{1}{3}}-6x-8y$

令 $\begin{cases}L'_x=6960x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}-216y^{\frac{1}{3}}-6=3y^{\frac{1}{3}}(2320x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}}-72)-6=0\\L'_y=2320x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{6}}-72xy^{-\frac{2}{3}}-8=xy^{-\frac{2}{3}}(2320x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{6}}-72)-8=0\end{cases}$，得驻点 $(256,64)$，

此时 $Q=12\times\sqrt{256}\times\sqrt[6]{64}=384$，在实际问题中由于驻点唯一，故利润 L 在 $Q=384$ 处取到最大值.

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid y-2\le x\le\sqrt{4-y^2}\ ,0\le y\le 2\}$，计算 $I=\iint\limits_D\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【解析】 $I=\iint\limits_D\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-\sin\varphi)^2d\varphi\int_0^2\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)^2d\varphi\int_0^{\frac{2}{\sin\varphi-\cos\varphi}}\rho d\rho$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi=2(\varphi-\sin^2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi=2(\dfrac{\pi}{2}-1)+\pi=2\pi-2$.

（20）（本题满分 12 分）

求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数$S(x)$.

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-4)^{n+1}+1}{4^{n+1}(2n+3)}x^{2n+2}}{\dfrac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}}\right|<1$，解得$|x|<1$，从而$R=1$，收敛区间$(-1,1)$，当$x=\pm1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}$收敛，故收敛域为$[-1,1]$.

当$x\in[-1,1]$，令$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{4^n(2n+1)}$，

令$S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\neq0$，

此时$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}=\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$，故

$S_1(x)=\dfrac{1}{x}\arctan x,\quad x\neq0$.

$S_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{4^n(2n+1)}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)},x\neq0$，此时

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{4^n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{4}{4-x^2}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}=\int_0^x\dfrac{4}{4-x^2}dx=\ln\dfrac{2+x}{2-x},x\neq0$，故

$S_2(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2+x}{2-x},\quad x\neq0$.

$x=0$时，$S(0)=2$.

综上当$x\in[-1,1]$，$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\arctan x+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2+x}{2-x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1]\\ 2, & x=0\end{cases}$.

（21）（本题满分 12 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

（1）求正交变换$x=Qy$将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形；

（2）证明：$\min\limits_{x\neq0}\dfrac{f(x)}{x^Tx}=2$.

【解析】（1）二次型对应矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&1\\0&4-\lambda&0\\1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-4)^2(\lambda-2)=0$，

解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$

$\lambda_1=2$ 对应特征向量满足 $(A-2E)x=0$，解得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=4$ 对应特征向量满足 $(A-4E)x=0$，解得 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

ξ_1,ξ_2,ξ_3 已经两两正交，单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，故存在正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，

当 $x=Qy$ 时 $f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$.

（2）$\dfrac{f(x)}{x^Tx}\overset{x=Qy}{=}\dfrac{f(y)}{y^TQ^TQy}=\dfrac{f(y)}{y^Ty}=\dfrac{2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=2+\dfrac{2y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$

当 $x\neq0$ 时，由 $x=Qy$ 得 $y\neq0$，当 $y_2=y_3=0,y_1\neq0$ 时，$2+\dfrac{2y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$ 的最小值为 2，故 $\min\limits_{x\neq0}\dfrac{f(x)}{x^Tx}=2$.

（22）（本题 12 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体 X 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体 Y 的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

【解析】由题知：总体 X,Y 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le0\end{cases},f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y}{2\theta}} & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}$,

令 $L=\prod\limits_{i=1}^{n}f_X(x_i,\theta)\cdot\prod\limits_{j=1}^{m}f_Y(y_j,\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\cdot\prod\limits_{j=1}^{m}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y_j}{2\theta}}=\frac{1}{2^m}\frac{1}{\theta^{m+n}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}e^{-\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta}}$

$$\ln L=-m\ln2-(m+n)\ln\theta-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}{2\theta}$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{m+n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}+\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta^2}=0$$

解得 $\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}y_j\right)$

故 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)$

$$D(\hat{\theta})=D\left(\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)\right)=\frac{1}{(m+n)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}D(Y_j)\right)$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\left(nD(X_i)+\frac{m}{4}D(Y_j)\right)$$

而 $D(X_i)=\theta^2, D(Y_j)=4\theta^2$，从而 $D(\hat{\theta})=\frac{1}{(m+n)^2}\left(n\theta^2+\frac{m}{4}\cdot 4\theta^2\right)=\frac{\theta^2}{m+n}$