2022年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）

（科目代码：302）

一、选择题：1~10题，每小题5分，共50分.

（1）当$x \to 0$时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$是非零无穷小量，给出以下四个命题

① 若$\alpha(x) \sim \beta(x)$，则$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$；

② 若$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则$\alpha(x) \sim \beta(x)$；

③ 若$\alpha(x) \sim \beta(x)$，则$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$；

④ 若$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，则$\alpha(x) \sim \beta(x)$.

其中正确的序号是　　（　　）

A：①②；　B：①④；　C：①③④；　D：②③④.

（2）$\int_0^2 dy \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx =$　　（　　）

$(A)\frac{\sqrt{2}}{6}$　　$(B)\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{\sqrt{2}}{3}$　　$(D)\frac{2}{3}$

（3）设函数$f(x)$在$x = x_0$处有2阶导数，则　　（　　）

(A)当$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加时，$f'(x_0) > 0$.

(B)当$f'(x_0) > 0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加.

(C)当$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0) > 0$.

(D)当$f''(x_0) > 0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数.

（4）设函数$f(t)$连续，令$F(x,y) = \int_0^{x-y} (x-y-t) f(t) dt$，则　　（　　）

$(A)\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　$(B)\ \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

$(C)\ \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　$(D)\ \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

（5）设p为常数，若反常积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p (1-x)^{1-p}} dx$收敛，则$p$的取值范围是　　（　　）

$(A)(-1,1)$　　$(B)(-1,2)$　　$(C)(-\infty,1)$　　$(D)(-\infty,2)$

（6）设有数列$\{x_n\},-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$,则　　（　）

(A)若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(B)若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在..

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

(D)若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

（7）已知$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+\sin x}dx$，则　　（　）

(A) $I_1<I_2<I_3$；　(B) $I_2<I_1<I_3$；　(C) $I_1<I_3<I_2$；(D) $I_3<I_2<I_1$.

（8）设A为3阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$A$的特征值为$-1,1,0$的充分必要条件是　（　）

(A)存在可逆矩阵P,Q，使得$A=P\Lambda Q$；　　(B)存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{-1}$；

(C)存在正交矩阵Q，使得$A=Q\Lambda Q^{-1}$；　　(D)存在可逆矩阵P，使得$A=P\Lambda P^{T}$；

（9）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组$Ax=b$解的情况为　　（　）

(A)无解；　(B) 有解；　(C)有无穷多解或无解 ；　(D) 有唯一解或无解；

（10）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围　　（　）

(A) $\{0,1\}$ ；　　(B) $\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\ne-2\}$；

(C) $\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\ne-1,\lambda\ne-2\}$ ；　　(D) $\{\lambda\mid\lambda\in R,\lambda\ne-1\}$.

二、填空题：11~16题，每题5分，共30分.

（11）若$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$__________.

（12）已知函数$y=y(x)$由方程$x^2+xy+y^3=3$确定，则$y''(1)=$______.

（13）$\int_0^1\dfrac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$________.

（14）微分方程 $y''' - 2y'' + 5y' = 0$ 的通解 $y(x) =$ ______.

（15）已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = \sin 3\theta, (0 \le \theta \le \frac{\pi}{3})$，则 L 所围成的有界区域的面积为：_____.

（16）设 A 为3阶矩阵，交换 A 的第 2 行和第3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵 $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $tr(A^{-1}) =$ ______.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，满足 $\lim_{x \to 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1+\sin^2 x)}{x^2} = 2$，求 $f'(1)$.

（18）（本题满分 12 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy' - 4y = 2\ln x - 1$ 满足条件 $y(1) = \frac{1}{4}$ 的解，求曲线 $y = y(x)$，$(1 \le x \le e)$ 的弧长.

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域，计算 $I = \iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} dxdy$.

（20）（本题满分 12 分）

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = 2(u-v)e^{-(u+v)}$，且满足 $f(u,0) = u^2 e^{-u}$.

（1）记 $g(x,y) = f(x, y-x)$，求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

（2）求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

（21）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有二阶连续导数，证明 $f''(x) \ge 0$ 的充要条件为对于不同实数 a,b，

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

（22）（本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$，

（1）求正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（2）证明：$\min_{x \ne 0} \frac{f(x)}{x^T x} = 2$.

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试题解析

一、选择题：1~10 题，每小题 5 分，共 50 分.

（1）当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$、$\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题

① 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$；

② 若 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

③ 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$；

④ 若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

其中正确的序号是（　　）

A：①②；　B：①④；　C：①③④；　D：②③④.

【答案】C

解析：当 $x \to 0$ 时，若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^2 = 1$，即 $\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 1-1 = 0$，故 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$.所以①③正确.

当 $x \to 0$ 时，$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)} = 1$，此时 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \pm 1$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = -1$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 不是等价无穷小，故 ②不正确.

当 $x \to 0$ 时，若 $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x) - o(\alpha(x))} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$，所以 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，④正确.

综上，C 为选项.

（2）$\int_0^2 dy \int_y^2 \dfrac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx =$　　　　　　（　　）

$(A)\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　$(B)\dfrac{1}{3}$　　$(C)\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　$(D)\dfrac{2}{3}$

【答案】D

【解析】交换积分次序可得 $\int_0^2 dy \int_y^2 \dfrac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^2 dx \int_0^x \dfrac{y}{\sqrt{1+x^3}} dy = \dfrac{1}{2}\int_0^2 \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \dfrac{1}{3}(1+x)^3 \Big|_0^2 = \dfrac{2}{3}$.

（3）设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有 2 阶导数，则　　　　（　　）

(A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时， $f'(x_0)>0$.

(B) 当 $f'(x_0)>0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.

(C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时， $f''(x_0)>0$.

(D) 当 $f''(x_0)>0$ 时， $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

【答案】 B

【解析】因为函数 $f(x)$ 处有 2 阶导数，则：

$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ 存在，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$ ；

当 $f'(x_0)>0$ 时，有极限的局部保号性得，存在 $\delta>0$ ，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $f'(x)>0$ ，即存在存在 $\delta>0$ ，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时， $f(x)$ 单调增加，故选 B .

（4）设函数 $f(t)$ 连续，令 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$ ，则（　　）

(A) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　(B) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　(D) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

【答案】C.

【解析】 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt=(x-y)\int_0^{x-y}f(t)dt-\int_0^{x-y}tf(t)dt$ ，

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)dt+(x-y)f(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)dt$ ， $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y)$ ，

同理 $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\int_0^{x-y}f(t)dt-(x-y)f(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)dt$ ， $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y)$ ，

综上 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ，选项 C 正确.

（5）设 p 为常数，若反常积分 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$ 收敛，则 p 的取值范围是　　　（　　）

$(A)(-1,1)$　　$(B)(-1,2)$　　$(C)(-\infty,1)$　　$(D)(-\infty,2)$

【答案】 A

【解析】当 $p=1$ 时， $\int_0^1\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx=\int_0^1\dfrac{\ln x}{x}dx$ 发散，排除 B 和 D ；

当 $p=-1$ 时， $\int_0^1\dfrac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx=\int_0^1\dfrac{x\ln x}{(1-x)^2}dx=\int_0^1\dfrac{(1-t)\ln(1-t)}{t^2}dt$ ，又 $\lim\limits_{t\to0^+}(t-0)\dfrac{(t-1)\ln(1-t)}{t^2}=1$ ，

由无界函数反常积分审敛法（同济七版第五章第五节定理 7）知，积分发散，排除C；故选A.

（6）设有数列$\{x_n\},-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$, 则 （ ）

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在..

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

【答案】D

【解析】在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上，对于选项$A$，取$x_n=(-1)^n$，显然不对；

对于选项B，取$x_n=(-1)^n$，显然不对；

对于选项C，取$x_n=(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$不存在，所以该选项错误.

对于选项D，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，不妨记为$A$，由于$\sin x$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$单调，所以有$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=\arcsin A$，但如果取$x_n=(-1)^n$也可发现$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.故选$D$.

（7）已知$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx$, $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$, $I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$，则（ ）

(A) $I_1<I_2<I_3$；(B) $I_2<I_1<I_3$；(C) $I_1<I_3<I_2$；(D) $I_3<I_2<I_1$.

【答案】A.

【解析】$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{\frac{x}{2}}{(1+\cos x)}dx$, $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$, $I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\frac{1+\sin x}{2}}dx$，先比较$I_1$, I_2的大小，令

$f(x)=\dfrac{x}{2}-\ln(1+x)\ x\in(0,1)$，此时$f(0)=0$，此时$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x-1}{2(1+x)}<0$，即$f(x)$单调递减，从而$f(x)<f(0)=0$，可得$\dfrac{x}{2}<\ln(1+x),x\in(0,1)$，从而$I_1<I_2$.

再比较I_3, I_2的大小，因$\ln(1+x)<x$, $\dfrac{1+\sin x}{2}<1+\cos x$, $x\in(0,1)$，则$\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\dfrac{x}{\frac{1+\sin x}{2}}$，从而

$I_3>I_2$.综上，可得 A 正确.

（8）设 A 为3阶矩阵，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 的特征值为 $-1,1,0$ 的充分必要条件是（　　）

(A) 存在可逆矩阵 P,Q，使得 $A=P\Lambda Q$；　　　　(B) 存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$；

(C) 存在正交矩阵 Q，使得 $A=Q\Lambda Q^{-1}$ ；　　　(D) 存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{T}$；

【答案】B

【解析】3 阶 A 有 $-1,1,0$ 三个不同的特征值，所以 A 可以相似对角化，故存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$；若存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\Lambda P^{-1}$，即 A 相似与 Λ，而相似矩阵具有相同的特征值，而 Λ 的特征值为 $1,-1,0$，故 A 的特征值为 $-1,1,0$.因此选 B.

（9）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组 $Ax=b$ 解的情况为（　）

(A) 无解；　　(B) 有解；　　(C) 有无穷多解或无解 ；　　(D) 有唯一解或无解；

【答案】D.

【解析】$(A\,|\,b)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\1&b&b^2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&a^2-1&1\\0&b-1&b^2-1&3\end{pmatrix}$

（1）当 $a=1$ 或 $b=1$ 时，$r(A)\neq r(A\,|\,b)$，方程无解

（2）当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 1$ 时，$(A\,|\,b)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a+1&\dfrac{1}{a-1}\\0&1&b+1&\dfrac{3}{b-1}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a+1&\dfrac{1}{a-1}\\0&0&b-a&\dfrac{3}{b-1}-\dfrac{1}{a-1}\end{pmatrix}$

（i）当 $a\neq b$ 时，$r(A)=r(A\,|\,b)=3$，方程有唯一解

（ii）当 $a=b$ 时，$r(A)=2$，$r(A\,|\,b)=3$，方程无解；

综述：方程有唯一解或无解，选 D.

（10）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 等价，则 λ 的取值范围（　）

(A) $\{0,1\}$ ；　　　　　　　　(B) $\{\lambda\,|\,\lambda\in R,\lambda\neq -2\}$；

(C) $\{\lambda\,|\,\lambda\in R,\lambda\neq -1,\lambda\neq -2\}$ ；　(D) $\{\lambda\,|\,\lambda\in R,\lambda\neq -1\}$.

【答案】C

【解析】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价的充要条件是

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$，而$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,,\alpha_4)$

$$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\\lambda&1&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1-\lambda^2&1-\lambda&0\\1-\lambda&1-\lambda^2&0&\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$$

（1）当$\lambda=1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=1$，此时向量组等价

（2）当$\lambda\neq1$时

$$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1+\lambda&1&0\\1&1+\lambda&0&-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1+\lambda&1&0\\0&1&-1&-\lambda-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\lambda&1&1\\0&1&-1&-\lambda-1\\0&0&2+\lambda&(1+\lambda)^2\end{pmatrix}$$

（i）当$\lambda=-2$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组不等价

（ii）当$\lambda\neq-2,\lambda=-1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=2$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组不等价

（iii）当$\lambda\neq-2,\lambda\neq-1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组等价

综上，当$\lambda\neq-2,\lambda\neq-1$时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价；选 C

二、填空题：11~16 题，每题 5 分，共 30 分.

（11）若$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$__________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\cot x\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2\tan x}}=e^{\frac{1}{2}}$.

（12）已知函数$y=y(x)$由方程$x^2+xy+y^3=3$确定，则$y''(1)=$_______.

【答案】$-\dfrac{31}{32}$

【解析】由已知可得$y(1)=1$.

方程$x^2+xy+y^3=3$两端对x求导得

$2x+y+xy'+3y^2y'=0$，代入$y(1)=1$得$y'(1)=-\dfrac{3}{4}$.

方程$2x+y+xy'+3y^2y'=0$两端对x求导得$2+2y'+xy''+6y(y')^2+3y^2y''=0$，代入

$y(1)=1$，$y'(1)=-\dfrac{3}{4}$得$y''(1)=-\dfrac{31}{32}$.

（13）$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}dx =$________.

【答案】$\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

【解析】$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{(2x-1)+4}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \int_0^1 \frac{4}{x^2-x+1}dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}d(x^2-x+1) + 4\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$= \ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi .$$

（14）微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解 $y(x)=$_______.

【答案】$y=C_1+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.

【解析】$y'''-2y''+5y'=0$ 对应的特征方程为 $r^3-2r^2+5r=0$ ，求解可得：$r_1=0, r_{2,3}=1\pm 2i$ ，

故微分方程的通解为 $y=C_1+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$.

（15）已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta, (0\le\theta\le\frac{\pi}{3})$ ，则 L 所围成的有界区域的面积为：_____.

【答案】$\frac{\pi}{12}$

【解析】面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 3\theta)^2 d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{\pi}(\sin t)^2 dt = \frac{1}{6}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi}{12}$

（16）设 A 为3阶矩阵，交换 A 的第2行和第3行，再将第2列的 -1 倍加到第一列，得到矩阵

$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A^{-1} 的迹 $tr(A^{-1})=$_______.

【答案】-1.

【解析】令 $P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $P_1AP_2=B$

$$A=P_1^{-1}BP_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & -1\\ -1 & -\lambda & 0\\ 0 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$$，解得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i$

故 A^{-1} 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-i,\lambda_3=i$，从而 $tr(A^{-1})=-1$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

【答案】 $f'(1)=-1$

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$ 可得：$\lim\limits_{x\to 0}f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)=0$，即 $f(1)=0$.

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{3f(1+\sin^2 x)-3f(1)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)}{e^{x^2}-1}\bullet\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-3\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2 x)-f(1)}{\sin^2 x}\bullet\frac{\sin^2 x}{x^2}\\&=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)\end{aligned}$$

故：$f'(1)=-1$

（18）（本题满分 12 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$ 满足条件 $y(1)=\dfrac{1}{4}$ 的解，求曲线 $y=y(x)$，$(1\le x\le e)$ 的弧长.

【答案】 $\dfrac{1}{4}(e^2+1)$

【解析】由题意可得：$y''-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{2\ln x-1}{2x}$，则：

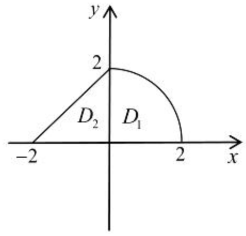
$$y(x)=e^{-\int-\frac{2}{x}dx}\left[\int\frac{2\ln x-1}{2x}\bullet e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x^2\left[\int\frac{2\ln x-1}{2x^3}dx+C\right]=-\frac{1}{2}\ln x+Cx^2$$，其中 C 为任意常数，

又 $y(1)=\dfrac{1}{4}$，则 $C=\dfrac{1}{4}$，故 $y(x)=-\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{4}x^2$，则弧长为：

$$L=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x})^2}dx=\int_1^e(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x})dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right]_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域，计算 $I=\iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.



【答案】$2\pi-2$

【解析】$I=\iint_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-\sin\varphi)^2d\varphi\int_0^2\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)^2d\varphi\int_0^{\frac{2}{\sin\varphi-\cos\varphi}}\rho d\rho$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi=2(\varphi-\sin^2\varphi)|_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi=2(\frac{\pi}{2}-1)+\pi=2\pi-2$.

（20）（本题满分 12 分）

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)e^{-(u+v)}$，且满足 $f(u,0)=u^2e^{-u}$.

（1）记 $g(x,y)=f(x,y-x)$，求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$；

（2）求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

【答案】（1） $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=(4x-2y)e^{-y}$；（2） $f(u,v)=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$， $f(0,0)=0$ 为极小值.

【解析】（1） $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=f_1'-f_2'=2(x-y+x)e^{-(x+y-x)}=(4x-2y)e^{-y}$;

（2）由（1）的结论： $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=f_1'-f_2'=2(x-y+x)e^{-(x+y-x)}=(4x-2y)e^{-y}$ 得：

$g(x,y)=f(x,y-x)=\int(4x-2y)e^{-y}dx=2x(x-y)e^{-y}+\varphi(y)$ ，

令 $x=y,y-x=v$，则 $f(u,v)=-2uve^{-(u+v)}+\varphi(u+v)$，又 $f(u,0)=u^2e^{-u}$，得

$\varphi(u)=u^2e^{-u}$，所以 $f(u,v)=-2uve^{-(u+v)}+(u+v)^2e^{-(u+v)}=(u^2+v^2)e^{-(u+v)}$.

令：$\begin{cases}f_u'=2ue^{-(u+v)}-(u^2+v^2)e^{-(u+v)}=0\\ f_v'=2ve^{-(u+v)}-(u^2+v^2)e^{-(u+v)}=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}u=0\\ v=0\end{cases},\begin{cases}u=1\\ v=1\end{cases}$,

$\begin{cases}f_{uu}''=(2-4u+u^2+v^2)e^{-(u+v)}\\ f_{uv}''=(-2v-2u+u^2+v^2)e^{-(u+v)}\\ f_{vv}''=(2-4v+u^2+v^2)e^{-(u+v)}\end{cases}$，对于$\begin{cases}u=0\\ v=0\end{cases}$,有 $A=2,B=0,C=2$，从而 $AC-B^2>0$， $A>0$，所以 $f(0,0)=0$ 为极小值.

对于$\begin{cases}u=1\\ v=1\end{cases}$，有 $A=0,B=-2,C=0$，从而 $AC-B^2<0$，所以 $f(1,1)$ 不是极值.

（21）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明 $f''(x)\geq 0$ 的充要条件为对于不同实数 a,b，

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

【证明】必要性：将函数 $f(x)$ 在点 $x=\frac{a+b}{2}$ 处用泰勒公式展开得：

$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$ ，其中 $\xi \in\left(x,\frac{a+b}{2}\right)$ ，则

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

由于 $f''(x)\ge 0$ ，所以 $\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$ ，

又因为 $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{b^2-a^2}{2}\right)=0$

所以：$\int_a^b f(x)dx \ge (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，从而：$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$ ；

充分性：由于 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ，所以对于 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点 x_0 ，存在 $\delta>0$ ，在 $U(x_0,\delta)$ 内，

有 $f\left(x_0\right)\le\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx$ ，（注：在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上，令 $a=x_0-\delta, b=x_0+\delta$ ，由邻域的定义，

x_0 为邻域的中点，因此 $x_0=\frac{a+b}{2}$ ，代入 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 即可），

从而有 $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx-2\delta f\left(x_0\right)\ge 0$ ，故 $\frac{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx-2\delta f\left(x_0\right)}{\delta^3}\ge 0$ ，

$$\begin{aligned}
\text{所以}\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx-2\delta f\left(x_0\right)}{\delta^3}&=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f\left(x_0\right)}{3\delta^2}\\
&=\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(x_0+\delta)-f'(x_0-\delta)}{6\delta}\\
&=\frac{1}{6}\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(x_0+\delta)-f'(x_0)}{\delta}+\frac{1}{6}\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(x_0-\delta)-f'(x_0)}{-\delta}\\
&=\frac{1}{3}f''(x_0)
\end{aligned}$$

由函数极限的局部保号性可知：$\frac{1}{3}f''(x_0)\ge 0$ ，从而 $f''(x_0)\ge 0$ ，又因为 x_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，所以有 $f''(x)\ge 0, x\in(-\infty,+\infty)$.

证毕.

（22）（本题满分 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$，

（1）求正交变换 $x=Qy$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（2）证明：$\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(x)}{x^Tx}=2$.

解：（1）二次型对应矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&4&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&1\\0&4-\lambda&0\\1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-4)^2(\lambda-2)=0$，

解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=4$

$\lambda_1=2$ 对应特征向量满足 $(A-2E)x=0$，解得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\lambda_3=4$ 对应特征向量满足 $(A-4E)x=0$，解得 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

ξ_1,ξ_2,ξ_3 已经两两正交，单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，故存在正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，

当 $x=Qy$ 时 $f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2$.

（2）$\dfrac{f(x)}{x^Tx}\overset{x=Qy}{=}\dfrac{f(y)}{y^TQ^TQy}=\dfrac{f(y)}{y^Ty}=\dfrac{2y_1^2+4y_2^2+4y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=2+\dfrac{2y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$

当 $x\neq 0$ 时，由 $x=Qy$ 得 $y\neq 0$，当 $y_2=y_3=0,y_1\neq 0$ 时，$2+\dfrac{2y_2^2+2y_3^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$ 的最小值为 2，故 $\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(x)}{x^Tx}=2$.