2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）

（科目代码：301）

一、选择题：1~10 题，每小题 5 分，共 50 分.

（1）设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则 （ ）

(A) $f(1)=0$ (B) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ (C) $f'(1)=1$ (D) $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=1$

（2）设函数 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$，其中 $f(u)$ 可导，若 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy(\ln y-\ln x)$，则 （ ）

(A) $f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$ (B) $f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

(C) $f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=1$ (D) $f(1)=0,f'(1)=1$

（3）设有数列 $\{x_n\},-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$, 则 （ ）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在..

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

（4）已知 $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+\cos x)}dx$, $I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$, $I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+\sin x}dx$ ，则（ ）

(A) $I_1<I_2<I_3$；(B) $I_2<I_1<I_3$； (C) $I_1<I_3<I_2$； (D) $I_3<I_2<I_1$.

（5）下列是 $A_{3\times3}$ 可对角化的充分而非必要条件是 （ ）

(A) A 有 3 个互不相等的特征值； (B) A 有 3 个线性无关的特征向量；

(C) A 有 3 个两两线性无关的特征向量； (D) A 的属于不同特征值的特征向量正交.

（6）设 A,B 为 n 阶矩阵， E 为单位矩阵，若方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 （ ）

(A) 方程组$\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y=0$只有零解；　　(B) 方程组$\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y=0$只有零解；

(C) 方程组$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y=0$与$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y=0$同解；$(D)$ 方程组$\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y=0$与$\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y=0$同解.

（7）设$\alpha_1=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围（　）

(A) $\{0,1\}$ ；　　(B) $\{\lambda \mid \lambda\in R,\lambda\neq -2\}$；

(C) $\{\lambda \mid \lambda\in R,\lambda\neq -1,\lambda\neq -2\}$ ；　　(D) $\{\lambda \mid \lambda\in R,\lambda\neq -1\}$.

（8）设随机变量$X\sim U(0,3)$，$Y\sim P(2)$，$Cov(X,Y)=-1$，求$D(2X-Y+1)=$（　）

(A) 10　(B) 9　(C) 1　(D) 0

（9）设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$独立同分布，且$E(X_i^k)=\mu_k$，用切比雪夫不等式估计

$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu_1\right|\geq\varepsilon\right\}\leq$　（　）

(A) $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　(B) $\frac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$　(C) $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　(D) $\frac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

（10）设$X\sim N(0,1)$，在$X=x$的条件下，$Y\sim N(x,1)$则X与Y的相关系数为　（　）

(A) 1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：11~16 题，每题 5 分，共 30 分.

（11）$f(x,y)=x^2+2y^2$在$(0,1)$处最大的方向导数为__________.

（12）$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$__________.

（13）设$x\geq 0,y\geq 0$，满足$x^2+y^2\leq ke^{x+y}$，则k的最小值为________.

（14）级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^{-n-x}$的收敛域为$(a,+\infty)$，则$a=$________.

（15）已知矩阵A和$E-A$可逆，其中E为单位矩阵，若矩阵B满足$(E-(E-A)^{-1})B=A$则$B-A=$____________.

（16）设A,B,C为随机事件，且A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(B\cup C \mid A\cup B\cup C)=$__________ .

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

（18）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid y-2\le x\le\sqrt{4-y^2}\ ,0\le y\le 2\}$，计算 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

（19）（本题满分 12 分）设 $\sum$ 为 $4x^2+y^2+z^2=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$ 的上侧，$\sum$ 的边界 L 的方向与 $\sum$ 的侧符合右手法则，求 $\int_L(yz^2-\cos z)dz+2xy^2dy+(2xyz+\sin z)dz$.

（20）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明 $f''(x)\ge 0$ 的充要条件为对于不同实数 a,b，

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

（21）（本题满分 12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$.

（1）求二次型矩阵；

（2）求正交矩阵 Q，使得二次型经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形；

（3）求：$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

（22）（本题 12 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体 X 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体 Y 的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题解析

一、选择题：1~10 题，每小题 5 分，共 50 分.

（1）设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则　　　　（　　）

$(A)\ f(1)=0$　　$(B)\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　　$(C)\ f'(1)=1$　　$(D)\ \lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$

【答案】 B

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$，故选 B.

（2）设函数 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$，其中 $f(u)$ 可导，若 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy(\ln y-\ln x)$，则　（　　）

$(A)\ f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$　　$(B)\ f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$(C)\ f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=1$　　$(D)\ f(1)=0,f'(1)=1$

【答案】B

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf(\dfrac{y}{x})+xyf'(\dfrac{y}{x})(\dfrac{-y}{x^2})=yf(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y^2}{x}f'(\dfrac{y}{x})$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf(\dfrac{y}{x})+xyf'(\dfrac{y}{x})(\dfrac{1}{x})=xf(\dfrac{y}{x})+yf'(\dfrac{y}{x})$；

则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xyf(\dfrac{y}{x})$，从而有 $2xyf(\dfrac{y}{x})=xy(\ln y-\ln x)$，即 $f(u)=\dfrac{1}{2}\ln u$，

故 $f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

（3）设有数列 $\{x_n\},-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2},$ 则　　　　（　　）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在..

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在.

【答案】D

【解析】在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上，对于选项$A$，取$x_n=(-1)^n$，显然不对；

对于选项B，取$x_n=(-1)^n$，显然不对；

对于选项C，取$x_n=(-1)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$不存在，所以该选项错误.

对于选项D，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，不妨记为$A$，由于$\sin x$在$[0,\dfrac{\pi}{2}]$单调，所以有$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=\arcsin A$，但如果取$x_n=(-1)^n$也可发现$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.故选$D$.

（4）已知$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+\sin x}dx$，则（　　）

(A) $I_1<I_2<I_3$；(B) $I_2<I_1<I_3$；　(C) $I_1<I_3<I_2$；　(D) $I_3<I_2<I_1$.

【答案】A

【解析】$I_1=\int_0^1\dfrac{\frac{x}{2}}{(1+\cos x)}dx$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$，$I_3=\int_0^1\dfrac{x}{\frac{1+\sin x}{2}}dx$，先比较$I_1$，$I_2$的大小，令

$f(x)=\dfrac{x}{2}-\ln(1+x)\ x\in(0,1)$，此时$f(0)=0$，此时$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x-1}{2(1+x)}<0$，即$f(x)$单调递减，

从而$f(x)<f(0)=0$，可得$\dfrac{x}{2}$《$\ln(1+x)\ x\in(0,1)$，从而$I_1<I_2$.

再比较I_3，I_2的大小，因$\ln(1+x)<x$，$\dfrac{1+\sin x}{2}<1+\cos x$，$x\in(0,1)$，则$\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}<\dfrac{x}{\frac{1+\sin x}{2}}$，从而

$I_3>I_2$.综上，可得A正确.

（5）下列是$A_{3\times3}$可对角化的充分而非必要条件是　　　　（　）

(A) A有3个互不相等的特征值；　　　(B) A有3个线性无关的特征向量；

(C) A有3个两两线性无关的特征向量；　(D) A的属于不同特征值的特征向量正交.

【答案】A

【解析】A有3个不同的特征值，则A有三个线性无关的特征向量，即A一定可相似对角化；但是A可相似对角化，不一定有三个不同的特征值，可以有重特征值（只要重根对应的线性无关的特征向量的个数等于重根的重数，也可相似对角化），故选A.

（6）设A,B为n阶矩阵，E为单位矩阵，若方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解，则　（　）

(A)方程组$\begin{pmatrix}A & O\\ E & B\end{pmatrix}y=0$只有零解；　　　　(B)方程组$\begin{pmatrix}E & A\\ O & AB\end{pmatrix}y=0$只有零解；

(C) 方程组$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y=0$与$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y=0$同解；$(D)$ 方程组$\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y=0$与$\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y=0$同解.

【答案】C

【解析】令$y=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，其中$x_i (i=1,2)$是$n$维列向量.

若$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y=0$与$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y=0$同解，即$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$与$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$同解，由于方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解，若$Ax_i=0$，则$Bx_i=0$，反之亦然，因此

$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$等价于$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$，所以选$C$.

（7）设$\alpha_1=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价，则$\lambda$的取值范围（ ）

(A) $\{0,1\}$ ； (B) $\{\lambda \mid \lambda\in R,\lambda\neq -2\}$；

(C) $\{\lambda \mid \lambda\in R,\lambda\neq -1,\lambda\neq -2\}$ ； (D) $\{\lambda \mid \lambda\in R,\lambda\neq -1\}$.

【答案】C

【解析】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价的充要条件是

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$，而$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,,\alpha_4)$

$$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 0 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

（1）当$\lambda=1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=1$，此时向量组等价

（2）当$\lambda\neq 1$时

$$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda-1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

（i）当$\lambda=-2$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组不等价

（ii）当$\lambda\neq -2,\lambda=-1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=2$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组不等价

（iii）当$\lambda \neq -2, \lambda \neq -1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3.\alpha_4)=3$，此时向量组等价

综上，当$\lambda \neq -2, \lambda \neq -1$时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$等价；选$C$

（8）设随机变量$X \sim U(0,3)$，$Y \sim P(2)$，$Cov(X,Y)=-1$，求$D(2X-Y+1)=$（　　）

(A) 10　　(B) 9　　(C) 1　　(D) 0

【答案】B

【解析】由$X \sim U(0,3)$，$Y \sim P(2)$知，$D(X)=\dfrac{3}{4}, D(Y)=2$，故

$D(2X-Y+1)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\operatorname{cov}(X,Y)=4 \bullet \dfrac{3}{4}+2+4=9$，故选$B$.

（9）设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$独立同分布，且$E(X_i^k)=\mu_k$，用切比雪夫不等式估计

$P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu_1\right| \geq \varepsilon\right\} \leq$　　　　（　　）

(A) $\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　　(B) $\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$　　(C) $\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　　(D) $\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

【答案】C

【解析】$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, E(\overline{X})=E(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\mu_1$，

$D(\overline{X})=D(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$，而$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\mu_2-\mu_1^2$

由切比雪夫不等式得，$P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu_1\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}=\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$，从而选$C$.

（10）设$X \sim N(0,1)$，在$X=x$的条件下，$Y \sim N(x,1)$则X与Y的相关系数为　　（　　）

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D.

【解析】由$X \sim N(0,1)$得，$E(X)=0, D(X)=1, f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<+\infty$，

又在$X=x$的条件下，$Y \sim N(x,1)$则$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}, -\infty<y<+\infty$，

所以$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}}, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$ 从而：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}}dx=e^{-\frac{y^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}},$$

即 $Y\sim N(0,2)$，则 $E(Y)=0,D(Y)=2$，故 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)}{\sqrt{2}}$，

其中 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{2\pi}xye^{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}}dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=E(X^2)=1$$

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{E(XY)}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选 D.

二、填空题：11~16 题，每题 5 分，共 30 分.

（11） $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在 $(0,1)$ 处最大的方向导数为__________.

【答案】4.

【解析】$\dfrac{\partial f}{\partial\tau}\Big|_{(0,1)}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(0,1)}(\cos\alpha,\sin\alpha)=\left(2x,4y\right)\Big|_{(0,1)}(\cos\alpha,\sin\alpha)=4\sin\alpha\le 4$

其中方向 $\tau=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，故最大值为 4.

（12） $\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$__________.

【答案】4.

【解析】$\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx==2\int_1^{e^2}\ln xd\sqrt{x}=2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\sqrt{x}d\ln x\right)$

$=2\left(\sqrt{e^2}\ln e^2-\int_1^{e^2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx\right)=2\left(2e-2\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}\right)=4$.

（13）设 $x\ge 0,y\ge 0$，满足 $x^2+y^2\le ke^{x+y}$，则 k 的最小值为________.

【答案】$k\ge\dfrac{4}{e^2}$.

【解析】原式等价为：$(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le k$，令 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$，则

$f_x'=2xe^{-(x+y)}-(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=(2x-x^2-y^2)e^{-(x+y)}=0$，

$f_y'=2ye^{-(x+y)}-(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=(2y-x^2-y^2)e^{-(x+y)}=0$

所以 $\begin{cases}2x-x^2-y^2=0\\2y-x^2-y^2=0\end{cases}$，得 $(1,1),(0,0)$，

对于驻点 $(0,0)$，$A=2,B=0,C=2,AC-B^2>0,A>0,$ $(0,0)$ 点为极小值点，且 $f(0,0)=0$；

对于驻点$(1,1), A=0, B=-2e^{-2}, C=0, AC-B^2<0, (1,1)$ 不是极值点；

当 $x=0, f(0,y)=y^2e^{-y}, (y>0)$，则 $f'(0,y)=2ye^{-y}-y^2e^{-y}=0$，得 $y=2$ 为驻点，

又 $f''(0,y)=(y^2-4y+2)e^{-y}, f''(0,2)=-2e^{-2}<0, f(0,2)=4e^{-2}$ 为最大值，

同理可得 $f(2,0)=4e^{-2}$ 也为最大值，综上可得 $k\geq\dfrac{4}{e^2}$.

（14）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}e^{-n-x}$ 的收敛域为 $(a,+\infty)$，则 $a=$________.

【答案】-1.

【解析】令 $u_n(x)=\dfrac{n!}{n^n}e^{-nx}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}e^{-(n+1)x}}{\frac{n!}{n^n}e^{-nx}}\right|=e^{-x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=e^{-x-1}<1$$，解得：$x>-1$，故 $a=-1$.

（15）已知矩阵 A 和 $E-A$ 可逆，其中 E 为单位矩阵，若矩阵 B 满足 $(E-(E-A)^{-1})B=A$ 则 $B-A=$____________.

【答案】$-E$.

【解析】由于 $E-A$ 可逆，所以 $(E-A)(E-A)^{-1}=E$，从而

$(E-(E-A)^{-1})B=A\Leftrightarrow[(E-A)(E-A)^{-1}-(E-A)^{-1}]B=A$

$\Leftrightarrow[(E-A)-E](E-A)^{-1}B=A\Leftrightarrow -A(E-A)^{-1}B=A$，又因为 A 可逆，两边同时左乘 A^{-1} 得

$(A-E)^{-1}B=E$，故 $B=A-E$，所以 $B-A=-E$.

（16）设 A,B,C 为随机事件，且 A 与 B 互不相容，A 与 C 互不相容，B 与 C 相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(B\cup C\,|\,A\cup B\cup C)=$__________ .

【答案】$\dfrac{5}{8}$.

【解析】$P(B\cup C\,|\,A\cup B\cup C)=\dfrac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=P(B)+P(C)-P(B)P(C)=\frac{5}{9}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B\cup C)-P(A(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)=\frac{8}{9}$$

从而 $P(B\cup C\,|\,A\cup B\cup C)=\dfrac{5}{8}$.

三、解答题：17~22 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

【答案】斜渐近线：$y=2x$

解：$y(x)=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}[\int(2+\sqrt{x})e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx+C]=e^{-\sqrt{x}}[\int(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx+C]=e^{-\sqrt{x}}[2xe^{\sqrt{x}}+C]$

$=2x+Ce^{-\sqrt{x}}$，其中 C 为任意常数，又 $y(1)=3$，得 $C=e$，即 $y(x)=2x+e^{1-\sqrt{x}}$.

显然该曲线无铅直渐近线.由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$，故该函数无水平渐近线.

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+e^{1-\sqrt{x}}}{x}=2$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-\sqrt{x}}=0$，故 $y=2x$ 为曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线.

（18）（本题满分 12 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,y-2\le x\le\sqrt{4-y^2}\ ,0\le y\le 2\}$，计算 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【答案】$2\pi-2$

【解析】$I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-\sin\varphi)^2d\varphi\int_0^2\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\varphi-\sin\varphi)^2d\varphi\int_0^{\frac{2}{\sin\varphi-\cos\varphi}}\rho d\rho$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi=2(\varphi-\sin^2\varphi)|_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi=2(\frac{\pi}{2}-1)+\pi=2\pi-2$.

（19）（本题满分 12 分）设 $\sum$ 为 $4x^2+y^2+z^2=1,x\ge0,y\ge0,z\ge0$ 的上侧，$\sum$ 的边界 L 的方向与 $\sum$ 的侧符合右手法则，求 $\int_L(yz^2-\cos z)dz+2xy^2dy+(2xyz+\sin z)dz$.

【答案】0

【解析】由斯托克斯公式得

$$I=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz^2-\cos z & 2xz^2 & 2xyz+x\sin z\end{vmatrix}=\iint\limits_\Sigma-2xzdydz+z^2dxdy$$

补面 $\sum_1:x=0,$，取后侧，$\sum_2:y=0$，取左侧，$\sum_3:z=0$，取下侧，

所以 $\sum+\sum_1+\sum_2+\sum_3$ 围成了封闭的曲面，取外侧，所围空间几何体为 Ω，由高斯公式可得：

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}-2xzdydz+z^2dxdy-0$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(-2z+0+2z)dv=0,$$

（20）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有二阶连续导数，证明 $f''(x)\geq 0$ 的充要条件为对于不同实数 a,b，

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

【证明】必要性：将函数 $f(x)$ 在点 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处用泰勒公式展开得：

$f(x)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{f''(\xi)}{2}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，其中 $\xi\in\left(x,\dfrac{a+b}{2}\right)$，则

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx$$

由于 $f''(x)\geq 0$，所以 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$，

又因为 $\displaystyle f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{b^2-a^2}{2}\right)=0$

所以：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，从而：$\displaystyle f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$；

充分性：由于 $\displaystyle f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，所以对于 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点 x_0，存在 $\delta>0$，在 $U(x_0,\delta)$ 内，

有 $\displaystyle f\left(x_0\right)\leq\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx$，（注：在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上，令 $a=x_0-\delta,b=x_0+\delta$，由邻域的定义，

x_0 为邻域的中点，因此 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，代入 $\displaystyle f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 即可），

从而有 $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx-2\delta f\left(x_0\right)\geq 0$，故 $\dfrac{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx-2\delta f\left(x_0\right)}{\delta^3}\geq 0$，

所以 $$\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx-2\delta f\left(x_0\right)}{\delta^3}=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f\left(x_0\right)}{3\delta^2}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(x_0+\delta)-f'(x_0-\delta)}{6\delta}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(x_0+\delta)-f'(x_0)}{\delta}+\frac{1}{6}\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(x_0-\delta)-f'(x_0)}{-\delta}$$

$$=\frac{1}{3}f''(x_0)$$

由函数极限的局部保号性可知：$\frac{1}{3}f''(x_0)\ge 0$，从而 $f''(x_0)\ge 0$，又因为 x_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意一点，所以有 $f''(x)\ge 0, x\in(-\infty,+\infty)$.

证毕.

（21）（本题满分 12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j$.

（1）求二次型矩阵；

（2）求正交矩阵 Q，使得二次型经正交变换 $x=Qy$ 化为标准形；

（3）求：$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

【答案】（1）$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$；（2）$Q=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}&\frac{-3}{\sqrt{70}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{-6}{\sqrt{70}}&\frac{2}{\sqrt{14}}\\0&\frac{5}{\sqrt{70}}&\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$；（3）$x=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$

【解析】（1）根据题意，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}ijx_ix_j=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3\ ,$$

故二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$；

（2）矩阵 A 的特征多项式为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\-2&\lambda-4&-6\\-3&-6&\lambda-9\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-14)=0$$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=14$，

$\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应特征向量满足 $(0E-A)x=0$，解得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=14$ 对应特征向量满足 $(14E-A)x=0$，解得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

实对称矩阵不同的特征值对应的特征向量正交，故只需将 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ 正交化，得

$\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$，将 η_1,η_2,ξ_3 单位化，得：$e_1=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}\frac{-3}{\sqrt{70}}\\\frac{-6}{\sqrt{70}}\\\frac{5}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}e_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$

取 $Q=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{-3}{\sqrt{70}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-6}{\sqrt{70}}&\frac{2}{\sqrt{14}}\\0&\frac{5}{\sqrt{70}}&\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$，则有正交变换 $x=Qy$ 把二次型化为标准形 $f=14y_3^2$；

（3）要使得 $f=0$，只要取 $(y_1,y_2,y_3)^T=(c_1,c_2,0)^T$，从而：

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{-3}{\sqrt{70}}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-6}{\sqrt{70}}&\frac{2}{\sqrt{14}}\\0&\frac{5}{\sqrt{70}}&\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\end{pmatrix}=\frac{c_1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{c_2}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$，令 $k_1=\frac{c_1}{\sqrt{5}},k_2=\frac{c_2}{\sqrt{70}}$，从而

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\0\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

（22）（本题 12 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自均值为 θ 的指数分布总体 X 的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为来自均值为 2θ 的指数分布总体 Y 的简单随机样本，且两样本相互独立，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，利用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，并求 $D(\hat{\theta})$.

【答案】$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}y_j\right)$；$D(\hat{\theta})=\frac{\theta^2}{m+n}$

【解析】由题知：总体 X,Y 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\0 & x\le 0\end{cases},f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y}{2\theta}} & y>0\\0 & y\le 0\end{cases},$

令$L=\prod_{i=1}^{n} f_X(x_i,\theta)\cdot\prod_{j=1}^{m} f_Y(y_j,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\cdot\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y_j}{2\theta}}=\frac{1}{2^m}\frac{1}{\theta^{m+n}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}e^{-\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta}}$

$$\ln L=-m\ln 2-(m+n)\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta}$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{m+n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}+\frac{\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta^2}=0$$

解得$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}y_j\right)$

故θ的最大似然估计量$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)$

$$D(\hat{\theta})=D\left(\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)\right)=\frac{1}{(m+n)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}D(Y_j)\right)$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\left(nD(X_i)+\frac{m}{4}D(Y_j)\right)$$

而$D(X_i)=\theta^2,D(Y_j)=4\theta^2$，从而$D(\hat{\theta})=\frac{1}{(m+n)^2}\left(n\theta^2+\frac{m}{4}\cdot 4\theta^2\right)=\frac{\theta^2}{m+n}$