2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）

（科目代码：303）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）当 $x \to 0$，$\int_0^{x^2} (e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的　　（　）

(A) 低阶无穷小.　(B) 等价无穷小.(C) 高阶无穷小.　(D) 同阶但非等价无穷小.

（2）函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处　　（　）

(A) 连续且取极大值.　(B) 连续且取得最小值.

(C) 可导且导数等于零.　(D) 可导且导数不为零.

（3）设函数 $f(x)=ax-b\ln x,(a>0)$，有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围　　（　）

(A) $(e,+\infty)$　(B) $(0,e)$　(C) $(0,\dfrac{1}{e})$　(D) $(\dfrac{1}{e},+\infty)$

（4）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x,$，则 $df(1,1)=$（　）

(A) $dx+dy$　(B) $dx-dy$　(C) dy　(D) $-dy$

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　）

(A) $2,0$　(B) $1,1$　(C) $2,1$　(D) $1,2$

（6）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶正交矩阵，若矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组

$Bx=\beta$ 的通解 $x=$　　（　）

(A) $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_1$. (B) $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_2$. (C) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+k\alpha_3$.　(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$.

（7）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，

则 P,Q 分别取（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（8）设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$, 下列为假命题的是　　　　　　（　　）

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$, 则 $P\left(A\middle|\overline{B}\right)=P(A)$.　　(B) 若 $P(A|B)>P(A)$, 则 $P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)>P(A)$.

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$, 则 $P\left(A\middle|B\right)>P(A)$　(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$, 则 $P\left(A\right)>P(B)$.

（9）设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则　　　　　　　　　　（　　）

(A) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　　(B) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　　(D) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（10）设总体 X 的概率分布 $P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2},P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体 X 的样本值 $1,3,2,2,1,3,1,2$ 可得 θ 的最大似然估计值为　　　　　　　　　　（　　）

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{3}{8}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{5}{8}$.

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$, 则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$ ______.

（12）$\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$ ______ .

（13）设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x,(0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为________.

（14）差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解 $y_t=$ _________.

（15）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的 x^3 项的系数为＝_________.

（16）甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X,Y 的相关系数为：_______.

三、解答题：17－22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) （本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

(18) （本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

(19) （本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)dxdy$.

(20) （本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

（1）求 $y_n(x)$；　（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(21) （本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 A 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

（22）（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为X，较长一段的长度记为Y，令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求X的概率密度；（2）求Z的概率密度；（3）求$E(\dfrac{X}{Y})$.

2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）当 $x \to 0$， $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的　　　　　（　　）

(A) 低阶无穷小.　　　　(B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　　　(D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(e^{x^6}-1)}{7x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^6}{7x^5}=0$ ，故选 C

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处　　　　　（　　）

(A) 连续且取极大值.　　　　(B) 连续且取得最小值.

(C) 可导且导数等于零.　　　　(D) 可导且导数不为零.

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$, 故函数连续；又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 故可导. 所以选 D.

（3）设函数 $f(x)=ax-b\ln x,(a>0)$，有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围　　　　　（　　）

(A) $(e,+\infty)$　　(B) $(0,e)$　　(C) $(0,\dfrac{1}{e})$　　(D) $(\dfrac{1}{e},+\infty)$

【答案】 A

【解析】 $f(x)=ax-b\ln x.$ 若 $b<0,$ 不满足条件，舍去；若 $b>0,$ 令 $f'(x)=a-\dfrac{b}{x}=0,$ 得 $x=\dfrac{b}{a}.$

在 $\left(0,\dfrac{b}{a}\right), f'(x)<0, \left(\dfrac{b}{a},+\infty\right), f'(x)>0.$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$

令 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=b-b\ln\dfrac{b}{a}=b\left(1-\ln\dfrac{b}{a}\right)<0,$ 得 $\ln\dfrac{b}{a}>1,$ 即 $\dfrac{b}{a}>e.$ 故选 A.

（4）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x,$ ，则 $df(1,1)=$（　　）

$(A)\ dx+dy$ $(B)\ dx-dy$ $(C)\ dy$ $(D)\ -dy$

【答案】C

【解析】由于 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，两边同时对 x 求导得：

$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)e^x=(x+1)^2+2x(x+1)$，令 $x=0$ 得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1+0$，

$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)2x=4x\ln x+2x^2\bullet\dfrac{1}{x}$，令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=0+2$

因此 $f_1'(1,1)=0;f_2'(1,1)=1$，所以 $df(1,1)=dy$，答案选 C.

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（ ）

$(A)\ 2,0$ $(B)\ 1,1$ $(C)\ 2,1$ $(D)\ 1,2$

【答案】B

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$

$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2+2x_1x_3-x_1^2$ $=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

二次型对应矩阵为$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-\lambda-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)，$$

则 $p=1,q=1$.

（6）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶正交矩阵，若矩阵 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 表示任意常数，则线性方程组 $Bx=\beta$ 的通解 $x=$ （ ）

$(A)\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_1$. $(B)\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+k\alpha_2$.

$(C)\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+k\alpha_3$. $(D)\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4$.

【答案】D

【解析】$\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+k\alpha_4)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 不难验证，$A,B,C$ 均不是方程组的解.

（7）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，则 P,Q 分别取（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】C

【解析】通过代入验证 $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$,故选 C.

（8）设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$, 下列为假命题的是　　　　　　（　　）

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$, 则 $P\left(A|\overline{B}\right)=P(A)$.　　(B) 若 $P(A|B)>P(A)$, 则 $P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)>P(A)$.

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$, 则 $P\left(A|B\right)>P(A)$　(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$, 则 $P\left(A\right)>P(B)$.

【答案】D

【解析】A 选项，由条件可知，A,B 独立，则结论显然成立；

B 选项：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)\Rightarrow P(AB)>P(A)P(B)$

$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}>\dfrac{1-P(B)+P(A)[P(B)-1]}{1-P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})$，

故 B 正确；

C 选项：由 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，利用条件概率公式易得 $P(AB)>P(A)P(B)$,

所以 $P\left(A|B\right)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$，故 C 正确；

D 选项：$P(\overline{A}|A\cup B)=\dfrac{P[\overline{A}(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$，$P(A)>P(B)-P(AB)$，

不能说明 $P(A)>P(B)$，错误.故选 D.

（9）设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　　(B) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　　(D) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

【答案】B

【解析】$E(\hat{\theta})=\mathrm{E}(\overline{X}-\overline{Y})=\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2$，

$D(\hat{\theta})=\mathrm{D}(\overline{X}-\overline{Y})=\mathrm{D}(\overline{\mathrm{X}})-D(\overline{Y})-2Cov(\overline{X},\overline{Y})=\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}-\dfrac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（10）设总体 X 的概率分布 $P\{X=1\}=\dfrac{1-\theta}{2},P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1+\theta}{4},$ 利用来自总体 X 的样本值 $1,3,2,2,1,3,1,2$ 可得 θ 的最大似然估计值为　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) $\dfrac{1}{4}$.　　(B) $\dfrac{3}{8}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{5}{8}$.

【答案】A

【解析】$L(\theta)=\left(\dfrac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\dfrac{1+\theta}{4}\right)^5$，

$\ln L(\theta)=3\ln\left(\dfrac{1-\theta}{2}\right)+5\ln\left(\dfrac{1+\theta}{4}\right)=3\ln(1-\theta)-3\ln 2+5\ln(1+\theta)-5\ln 4$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{-3}{1-\theta}+\dfrac{5}{1+\theta}=0,$ 得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$.

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$, 则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$ ______.

【答案】$\dfrac{\sin e^{-1}}{2e}$.

【解析】由题目可得 $y'=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}\sin e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, y'\big|_{x=1}=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}\sin e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\big|_{x=1}=\dfrac{\sin e^{-1}}{2e}$.

（12）$\int_{\sqrt{5}}^{5}\dfrac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$ ______ .

【答案】6

【解析】$\int_{\sqrt{5}}^{5}\dfrac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=\int_{\sqrt{5}}^{3}\dfrac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx+\int_{3}^{5}\dfrac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}d(9-x^2)+\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}d(x^2-9)=6\ .$$

（13）设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x,(0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为________.

【答案】$\dfrac{\pi}{4}$

【解析】由旋转体体积公式得：$V=\int_a^b \pi y^2(x)dx=\int_0^1 \pi x\sin^2\pi x dx=\dfrac{\pi}{4}$.

（14）差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解 $y_t=$ _________.

【答案】$y_t=\dfrac{t}{2}(t-1)+C$

【解析】先解齐次差分方程 $y_{t+1}-y_t=0, y_t=C$ ；

再设非齐次的特解为 $y_t^*=t(A_0+A_1t)$，代入差分方程：$(t+1)[A_0+A_1(t+1)]-t(A_0+A_1t)$

整理得：$A_0+2A_1t+A_1=t$，比较系数得：$A_0=-\dfrac{1}{2},A_1=\dfrac{1}{2}$，得通解：$y_t=\dfrac{t}{2}(t-1)+C$.

（15）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的 x^3 项的系数为＝_________.

【答案】-5

【解析】由行列式按行按列展开定理知 x^3 项为 $(-1)^{1+2+2}4x^3+(-1)^1x^3=-5x^3$，故 x^3 的系数为 -5 .

（16）甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X,Y 的相关系数为：_______.

【答案】$\dfrac{1}{5}$

【解析】联合分布率$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1)\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$，$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$E(XY)=\frac{3}{10},E(X)=\frac{1}{2},E(Y)=\frac{1}{2},D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{4}$，

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{4},\rho=\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$.

三、解答题：17－22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) （本题满分 10 分）

已知$\lim\limits_{x\to0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在，求$a$的值.

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}a+e,\lim\limits_{x\to0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1-x)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{e}$，

由于$\lim\limits_{x\to0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在，得$\frac{\pi}{2}a+e=-\frac{\pi}{2}a+\frac{1}{e}$，得$a=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{e}-e)$.

(18) （本题满分 12 分）

求函数$f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$的极值.

【解析】$f'_x(x,y)=\frac{2}{x}+\frac{2(x-1)\bullet2x^2-4x[(x-1)^2+y^2]}{4x^4}=\frac{2}{x}+\frac{x-1}{x^2}-\frac{(x-1)^2+y^2}{x^3}=0$，

$f'_y(x,y)=\frac{2}{x}+\frac{x-1}{x^2}-\frac{(x-1)^2}{x^3}=\frac{2x^2+x^2-x-x^2+2x-1}{x^3}=\frac{(2x-1)(x+1)}{x^3}=0$，

得$x=\frac{1}{2},x=-1$.故得驻点坐标$(\frac{1}{2},0),(-1,0)$.

$f''_{xx}(x,y)=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{2(x-1)\bullet x^3-[(x-1)^2+y^2]\bullet3x^2}{x^6}=\frac{-2x^2-2x+3}{x^4}+\frac{3y^2}{x^4}$

$f''_{xy}(x,y)=-\frac{2y}{x^3};f''_{yy}(x,y)=\frac{1}{x^2}$.在点$(\frac{1}{2},0)$处，得$A=24;B=0;C=4,AC-B^2=96>0,A>0$，取极小值$f(\frac{1}{2},0)=-\ln4+\frac{1}{2}$; 在点$(-1,0)$处，得$A=3;B=0;C=1,AC-B^2=3>0,A>0$，取极小值$f(-1,0)=2$.

(19) （本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)dxdy$.

【解析】$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{r^2(\sin\theta+\cos\theta)^2}r^3\cos2\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 e^{r^2+r^2\sin2\theta}r^3\cos2\theta dr$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{r^2+r^2\sin2\theta}d(r^2+r^2\sin2\theta)=\frac{1}{2}\int_0^1 re^{r^2+r^2\sin2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}dr=\frac{1}{4}\int_0^1(e^{2r^2}-e^{r^2})dr^2=\frac{1}{8}(e-1)^2$.

(20)（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

（1）求 $y_n(x)$；（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【解析】（1）由微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 得 $y_n(x)=Ce^{\int\frac{n+1}{x}dx}=Cx^{n+1}$，代入 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$，得

$C=\frac{1}{n(n+1)}$, 故 $y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$.

（2）$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1, R=\frac{1}{\rho}=1,$ 当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 收敛，故收敛域 $[-1,1]$.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}, x\in[-1,1]$, 则有 $S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，从而

$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt+S'(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+0=-\ln(1-x),$

$S(x)=\int_0^x S'(t)dt+S(0)=\int_0^x-\ln(1-t)dt+0=(1-x)\ln(1-x)+x$.

(21)（本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 A 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解析】$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ -1 & -a & \lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)[(\lambda-2)^2-1]$

$=(\lambda-b)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$，因为矩阵 A 仅有两个不同的特征值，所以 $b=1$ 或 $b=3$.

1.当 $b=1$ 时，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$，因为 A 相似于对角矩阵，所以 $r(E-A)=1$，

$$E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 0\end{pmatrix}$$，所以 $a=1$，

$(E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$，

$(3E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_3=(1,1,1)^T$，

令 $P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$；

2.当 $b=3$ 时，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$，因为 A 相似于对角矩阵，所以 $r(3E-A)=1$，

$$3E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1-a & 0\end{pmatrix}$$，所以 $a=-1$，

$(3E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$，

$(E-A)x=0$ 的基础解析为 $\alpha_3=(-1,1,1)^T$，

令 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求 X 的概率密度；

（2）求 Z 的概率密度；

（3）求 $E(\frac{X}{Y})$.

【答案】⑴ $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\ 0 & else\end{cases}$ ；⑵ $f_z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z>1,\\ 0 & else\end{cases}$ ；⑶ $2\ln 2-1$

【解析】⑴ 由题意得，$X \sim U(0,1), f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\ 0 & else\end{cases}$.

⑵ $Z=\frac{Y}{X}=\frac{2-X}{X}=\frac{2}{X}-1$,当 $z<1$ 时，$F_z(z)=0$ ；

当 $z\geq 1$ 时，$F_z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{\frac{2}{X}-1\leq z\}=P\left\{X\geq \frac{2}{z+1}\right\}=\int_{\frac{2}{z+1}}^{1}1dx=1-\frac{2}{z+1}$,

故 $f_z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z>1,\\ 0 & else\end{cases}$.

⑶ $E(\frac{X}{Y})=E(\frac{1}{Z})=\int_1^{+\infty}\frac{2}{(z+1)^2 z}dz=2\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z}\right)dz=2\ln 2-1$.