2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）

（科目代码：302）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）当 $x \to 0$，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的（　）

(A) 低阶无穷小.　　(B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　(D) 同阶但非等价无穷小.

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　）

(A) 连续且取极大值.　　(B) 连续且取得极小值.

(C) 可导且导数等于零.　　(D) 可导且导数不为零.

（3）有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 $2cm/s, -3cm/s$，当底面半径为 $10cm$，高为 $5cm$ 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为：

(A) $125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$.　　(B) $125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$.

(C) $-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$.　　(D) $-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$.

（4）设函数 $f(x)=ax-b\ln x, (a>0)$，有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围（　）

(A) $(e,+\infty)$　(B) $(0,e)$　(C) $(0,\dfrac{1}{e})$　(D) $(\dfrac{1}{e},+\infty)$

（5）设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则（　）

(A) $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$　(B) $a=1, b=\dfrac{1}{2}$　(C) $a=0, b=-\dfrac{1}{2}$　(D) $a=0, b=\dfrac{1}{2}$

（6）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x,$，则 $df(1,1)=$（　）

$(A)\ dx+dy \qquad (B)\ dx-dy \qquad (C)\ dy \qquad (D)\ -dy$

（7）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$ （　）

$(A)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n} \qquad (B)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

$(C)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n} \qquad (D)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

（8）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　）

$(A)\ 2,0 \qquad (B)\ 1,1 \qquad (C)\ 2,1 \qquad (D)\ 1,2$

（9）设3阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可以由向量组 β_1,β_2 线性表出，则（　　）

(A) $Ax=0$ 的解均为 $Bx=0$ 的解. $\qquad (B)$ $A^Tx=0$ 的解均为 $B^Tx=0$ 的解.

(C) $Bx=0$ 的解均为 $Ax=0$ 的解. $\qquad (D)$ $B^Tx=0$ 的解均为 $A^Tx=0$ 的解

（10）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q，使得 PAQ 为对角矩阵，则 P,Q 分别取（　）

$(A)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}. \qquad (B)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$

$(C)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}. \qquad (D)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=$ ______.

（12）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2e^t+t+1\\y=4(t-1)e^t+t^2\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$ _______.

（13）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}=$ ______.

（14）已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}dy$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ _________ .

（15）微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 $y=$________________.

（16）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的 x^3 项的系数为＝ _________ .

三、解答题：17－22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

（18）（本题满分 12 分）

已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$, 求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

（19）（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 满足 $\int\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\dfrac{1}{6}x^2-x+C, L$ 为曲线 $y=f(x),(4\le x\le 9)$， L 的弧长为 s， L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面的面积为 A，求 s 和 A.

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x),(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$ 满足条件 $y(\sqrt{3})=10$ 的解，

（1）求 $y(x)$； （2）设 P 为曲线 $y=y(x)$ 上一点，记曲线 $y=y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_P，当 I_P 最小时，求点 P 的坐标.

（21）（本题满分 12 分）

曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2,(x\ge 0,y\ge 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D，求 $\iint\limits_D xydxdy$.

（22）（本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 A 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试题解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）当 $x \to 0$， $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的 （ ）

(A) 低阶无穷小. (B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(e^{x^6}-1)}{7x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^6}{7x^5}=0$ ，故选 C

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 （ ）

(A) 连续且取极大值. (B) 连续且取得极小值.

(C) 可导且导数等于零. (D) 可导且导数不为零.

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$, 故函数连续；又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 故可导.所以选 D.

（3）有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为 $2cm/s,-3cm/s$，当底面半径为 $10cm$，高为 $5cm$ 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为：

(A) $125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$. (B) $125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$.

(C) $-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$. (D) $-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$.

【答案】D

【解析】由题意可知，$\dfrac{dr}{dt}=2, \dfrac{dh}{dt}=-3$, 又 $V=\pi r^2 h, S=2\pi rh$，

则 $\dfrac{dV}{dt}=2\pi rh\dfrac{dr}{dt}+\pi r^2\dfrac{dh}{dt}, \dfrac{dS}{dt}=2\pi h\dfrac{dr}{dt}+2\pi r\dfrac{dh}{dt}$，

当 $r=10, h=5$ 时，$\dfrac{dV}{dt}=-100\pi, \dfrac{dS}{dt}=-40\pi$ ，故选 D.

（4）设函数 $f(x)=ax-b\ln x,(a>0)$，有 2 个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围 （　）

$(A)\ (e,+\infty)$　　$(B)\ (0,e)$　　$(C)\ (0,\dfrac{1}{e})$　　$(D)\ (\dfrac{1}{e},+\infty)$

【答案】 A

【解析】 $f(x)=ax-b\ln x.$ 若 $b<0,$ 不满足条件，舍去；若 $b>0,$ 令 $f'(x)=a-\dfrac{b}{x}=0,$ 得 $x=\dfrac{b}{a}.$

在 $\left(0,\dfrac{b}{a}\right), f'(x)<0, \left(\dfrac{b}{a},+\infty\right), f'(x)>0.$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$

令 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=b-b\ln\dfrac{b}{a}=b\left(1-\ln\dfrac{b}{a}\right)<0,$ 得 $\ln\dfrac{b}{a}>1,$ 即 $\dfrac{b}{a}>e.$ 故选 A.

（5）设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则 （　）

$(A)\ a=1,b=-\dfrac{1}{2}$　　$(B)\ a=1,b=\dfrac{1}{2}$　　$(C)\ a=0,b=-\dfrac{1}{2}$　　$(D)\ a=0,b=\dfrac{1}{2}$

【答案】D

【解析】由 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$ 知，当 $f(x)=\sec x$ 时，$f(0)=\sec 0=1$，$f'(0)=0, f''(0)=1$，则 $f(x)=\sec x=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，故选 D.

（6）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x,$，则 $df(1,1)=$（　）

$(A)\ dx+dy$　　$(B)\ dx-dy$　　$(C)\ dy$　　$(D)\ -dy$

【答案】C

【解析】由于 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，两边同时对 x 求导得：

$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)e^x=(x+1)^2+2x(x+1)$，令 $x=0$ 得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1+0$，

$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)2x=4x\ln x+2x^2\bullet\dfrac{1}{x}$，令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=0+2$

因此 $f_1'(1,1)=0; f_2'(1,1)=1$，所以 $df(1,1)=dy$，答案选 C.

（7）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$ （　）

$(A)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　$(B)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

$(C)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$　　$(D)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

【答案】B

【解析】由定积分的定义可知，将$[0,1]$ n等分，取中间点的函数值做小矩形的高，则：

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$$，故选B.

（8）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$的正惯性指数与负惯性指数依次为（　）

(A) 2,0　　(B) 1,1　　(C) 2,1　　(D) 1,2

【答案】B

【解析】$f(x_1+x_2+x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$

$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2+2x_1x_3-x_1^2$ $=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

二次型对应矩阵为$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-\lambda-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$$，

则$p=1,q=1$.故选B.

（9）设3阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由向量组$\beta_1,\beta_2$线性表出，则（　　）

(A) $Ax=0$的解均为$Bx=0$的解.　　(B) $A^Tx=0$的解均为$B^Tx=0$的解.

(C) $Bx=0$的解均为$Ax=0$的解.　　(D) $B^Tx=0$的解均为$A^Tx=0$的解

【答案】D

【解析】根据向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由向量组$\beta_1,\beta_2$线性表出，可知存在可逆矩阵$P$，使得$BP=A$，则当$B^Tx_0=0$时，$A^Tx_0=(BP)^Tx_0=P^TB^Tx_0=0$恒成立，所以选$D$.

（10）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵$P$和上三角可逆矩阵$Q$，使得$PAQ$为对角矩阵，则$P,Q$分别取（　）

$(A)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　$(B)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$(C)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　$(D)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】C

【解析】通过代入验证$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$,故选$C$.

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=$ ______.

【答案】$\dfrac{1}{\ln 3}$.

【解析】$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}dx=-\int_0^{+\infty}3^{-x^2}d(-x^2)=-\dfrac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 3}$.

（12）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2e^t+t+1\\y=4(t-1)e^t+t^2\end{cases}$确定，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$______.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4te^t+2t}{2e^t+1}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(4e^t+4te^t+2)(2e^t+1)-(4te^t+2t)2e^t}{(2e^t+1)^3}$，将$t=0$代入得：

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\frac{2}{3}.$$

（13）设函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}=$______.

【答案】1

【解析】方程两端同时对x求导：

$z+(x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{2y}{1+4x^2y^2}=0$，将$x=0,y=2$代入原方程得$z=1$，再将$x=0,y=2$，$z=1$

代入得$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}=1$.

（14）已知函数$f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\dfrac{x}{y}dy$, 则$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ________.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$

【解析】交换积分次序得 $f(t)=\int_1^t dy\int_1^{y^2}\sin\dfrac{x}{y}dx$，从而

$f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^t\sin\dfrac{x}{y}dy=\int_1^t dy\int_1^{y^2}\sin\dfrac{x}{y}dx=\int_1^t\left(y\cos\dfrac{1}{y}-y\cos y\right)dy$，求导得：

$f'(t)=t\cos\dfrac{1}{t}-t\cos t$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$.

（15）微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 $y=$_______________.

【答案】$y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right),(C_1,C_2,C_3$ 为任意常数$)$

【解析】微分方程的特征方程为：$\lambda^3-1=0,$ 解得特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，故通解为：

$y=C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right),(C_1,C_2,C_3$ 为任意常数$)$.

（16）多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x & x & 1 & 2x\\1 & x & 2 & -1\\2 & 1 & x & 1\\2 & -1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中的 x^3 项的系数为＝_________.

【答案】-5

【解析】由行列式按行按列展开定理知 x^3 项为 $(-1)^{1+2+2}4x^3+(-1)^1x^3=-5x^3$，故 x^3 的系数为 -5.

三、解答题：17－22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1+\int_0^x e^{t^2}dt)-(e^x-1)}{(e^x-1)\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1+\int_0^x e^{t^2}dt)-(e^x-1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1+\int_0^x e^{t^2}dt)+\sin x\bullet e^{x^2}-e^x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\cos x\int_0^x e^{t^2}dt+\sin x\bullet e^{x^2}+1-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\int_0^x e^{t^2}dt}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\bullet e^{x^2}}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

（18）（本题满分 12 分）

已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$,求曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性及渐近线.

【答案】凹区间 $(-\infty,-1),(0,+\infty)$，凸区间 $(-1,0)$，$x=-1$ 为曲线的铅直渐近线，$y=x-1,y=-x+1$ 为曲线的斜渐近线.

【解析】由题设可知，$x=-1$ 为间断点.

当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2},f''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}>0,$

故曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹的；

当 $x<0$ 且 $x\neq -1$ 时，$f(x)=-\dfrac{x^2}{1+x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2},f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}$，

1.当 $x<-1$ 时，$f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}>0,$ 故曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是凹的；

2.当 $-1<x<0$ 时，$f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}<0,$ 故曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上是凸的；

综上所述：曲线 $y=f(x)$ 的凹区间 $(-\infty,-1),(0,+\infty)$，凸区间 $(-1,0)$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，所以曲线 $y=f(x)$ 不存在水平渐近线；

由于 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，所以 $x=-1$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x(1+x)}=1=k$，$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to +\infty}[\dfrac{x^2}{1+x}-x]=-1=b$，

所以 $y=x-1$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线，

又 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x^2}{x(1+x)}=-1=k$，$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to +\infty}[\dfrac{-x^2}{1+x}+x]=1=b$，

所以 $y=-x+1$ 为曲线 $y=f(x)$ 的另外一条斜渐近线，

综上所述：$x=-1$ 为曲线的铅直渐近线，$y=x-1, y=-x+1$ 为曲线的斜渐近线.

（19）（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 满足 $\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+C, L$ 为曲线 $y=f(x),(4\le x\le 9)$， L 的弧长为 s，L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面的面积为 A，求 s 和 A.

【答案】$s=\frac{22}{3}$，$A=\frac{425\pi}{9}$

【解析】因为 $\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+C$，两端关于 x 求导得 $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}x-1$，

故 $f(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}$，$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，

$$s=\int_4^9\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx=\int_4^9\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]^2}dx=\int_4^9\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_4^9=\frac{22}{3};$$

$$A=2\pi\int_4^9 y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx$$

$$=2\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{\pi}{3}\int_4^9(x-3)(x+1)dx=\frac{425}{9}\pi\ .$$

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x),(x>0)$ 是微分方程 $xy'-6y=-6$ 满足条件 $y(\sqrt{3})=10$ 的解，

（1）求 $y(x)$；（2）设 P 为曲线 $y=y(x)$ 上一点，记曲线 $y=y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_P，当 I_P 最小时，求点 P 的坐标.

【答案】（1）$y(x)=1+\frac{x^6}{3}$.（2）$P\left(\pm1,\frac{4}{3}\right)$ 时，I_P 有最小值 $\frac{11}{6}$.

【解析】（1）由微分方程 $xy'-6y=-6$ 得 $y'-\frac{6}{x}y=-\frac{6}{x}$，所以

$$y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left[\int(-\frac{6}{x})e^{-\int\frac{6}{x}dx}dx+C\right]=x^6\left(\frac{1}{x^6}+C\right)=1+Cx^6$$

将 $y(\sqrt{3})=10$ 代入，$C=\dfrac{1}{3}$，所以 $y(x)=1+\dfrac{x^6}{3}$.

（2）设 $P(x,y)$，则过 P 点的切线方程为 $Y-y=2x^5(X-x)$，

法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{2x^5}(X-x)$，令 $X=0$，所以 $Y=I_P=1+\dfrac{x^6}{3}+\dfrac{1}{2x^4}$，偶函数，因此只考虑 $(0,+\infty)$，

令 $(I_P)'=2x^5-\dfrac{2}{x^5}=0$，得 $x=1$，

又因为 $\dfrac{d^2I_P}{dx^2}\Big|_{x=1}=(10x^4+10x^{-6})\Big|_{x=1}=20>0$，

故在 $(0,+\infty)$ 上，$x=1$ 为函数唯一极小值点，必为最小值点，此时 P 的坐标为 $\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$.

所以当 P 的坐标为 $\left(\pm1,\dfrac{4}{3}\right)$ 时，I_P 有最小值，为 $\dfrac{11}{6}$.

（21）（本题满分 12 分）

曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2,(x\ge0,y\ge0)$ 与 x 轴围成的区域为 D，求 $\iint\limits_D xydxdy$.

【答案】$\dfrac{1}{48}$

【解析】$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}r^3\sin\theta\cos\theta dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{4}\cos^2 2\theta\sin\theta\cos\theta d\theta$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\sin2\theta d\theta=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\sin udu=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 u)\sin udu$$

$$=\frac{1}{16}(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{48}.$$

（22）（本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 A 相似于对角矩阵，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解析】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)[(\lambda-2)^2-1]$

$=(\lambda-b)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda-b)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$，因为矩阵 A 仅有两个不同的特征值，所以

$b=1$或$b=3$.

1.当$b=1$时，A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3$，因为$A$相似于对角矩阵，所以$r(E-A)=1$，

$$E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 0\end{pmatrix}$$，所以$a=1$，

$(E-A)x=0$的基础解析为$\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$，

$(3E-A)x=0$的基础解析为$\alpha_3=(1,1,1)^T$，

令$P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$；

2.当$b=3$时，A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$，因为$A$相似于对角矩阵，所以$r(3E-A)=1$，

$$3E-A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1-a & 0\end{pmatrix}$$，所以$a=-1$，

$(3E-A)x=0$的基础解析为$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$，

$(E-A)x=0$的基础解析为$\alpha_3=(-1,1,1)^T$，

令$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 1\end{pmatrix}$.