2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）

（科目代码：301）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 （　）

(A) 连续且取极大值.　　(B) 连续且取得极小值.

(C) 可导且导数等于零.　　(D) 可导且导数不为零.

（2）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x,$ ，则 $df(1,1)=$（　）

$(A)\ dx+dy$　　$(B)\ dx-dy$　　$(C)\ dy$　　$(D)\ -dy$

（3）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则 （　）

$(A)\ a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　$(B)\ a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

$(C)\ a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　$(D)\ a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

（4）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$ （　）

$(A)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　$(B)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

$(C)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$　　$(D)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　）

$(A)\ 2,0$　　$(B)\ 1,1$　　$(C)\ 2,1$　　$(D)\ 1,2$

（6）已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若 β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为　　（　）

$(A)\ \frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　$(B)\ -\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　$(C)\ \frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.　$(D)\ -\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

（7）设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，下列不成立的是　　（　）

$(A)\ r\begin{pmatrix}A & 0\\0 & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$.　$(B)\ r\begin{pmatrix}A & AB\\0 & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

$(C)\ r\begin{pmatrix}A & BA\\0 & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$.　$(D)\ r\begin{pmatrix}A & 0\\BA & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

（8）设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$, 下列为假命题的是　　（　）

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$, 则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.　(B) 若 $P(A|B)>P(A)$, 则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(A)$.

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$, 则 $P(A|B)>P(A)$　(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$, 则 $P(A)>P(B)$.

（9）设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则　　（　）

$(A)\ E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　$(B)\ E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

$(C)\ E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　$(D)\ E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（10）设 $X_1,X_2\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\overline{X}\ge 11\}$, 其中 $\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为　　（　）

$(A)\ 1-\Phi(0.5)$.　$(B)\ 1-\Phi(1)$.　$(C)\ 1-\Phi(1.5)$.　$(D)\ 1-\Phi(2)$.

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$________.

（12）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1, & x<0 \\ y=4(t-1)e^t+t^2, & x\geq 0 \end{cases}$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$________.

（13）欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 的解为 $y=$________.

（14）设 Σ 为空间区域 $\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+4y^2\leq 4, 0\leq z\leq 2\right\}$ 表面的外侧，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$ ________.

（15）设 $A=a_{ij}$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A|=3,$ 则

$A_{11}+A_{21}+A_{31}=$__________.

（16）甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X,Y 的相关系数为：_______.

三、解答题：17－22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) （本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

(18) （本题满分 12 分）

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},(n=1,2,\cdots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

（19）（本题满分 12 分）

已知曲线 C：$\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases}$，求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

（20）（本题满分 12 分）

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_{D}(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1.

(1)求 $I(D_1)$ 的值；(2)计算 $\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的边界.

(21) （本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$

（1）求正交矩阵 P，使 P^TAP 为对角矩阵.（2）求正定矩阵 C，使 $C^2=(a+3)E-A$，E 为 3 阶单位矩阵.

（22）（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y，令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

（1）求 X 的概率密度；

（2）求 Z 的概率密度；

（3）求 $E(\dfrac{X}{Y})$.

2021 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题解析

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处　　　　（　　）

(A) 连续且取极大值.　　　　(B) 连续且取得极小值.

(C) 可导且导数等于零.　　　　(D) 可导且导数不为零.

【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$, 故函数连续；又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 故可导.
所以选 D.

（2）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x,$ ，则 $df(1,1)=$（　　）

$(A)\ dx+dy$　　$(B)\ dx-dy$　　$(C)\ dy$　　$(D)\ -dy$

【答案】C

【解析】由于 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，两边同时对 x 求导得：

$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)e^x=(x+1)^2+2x(x+1)$，令 $x=0$ 得 $f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1+0$，

$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)2x=4x\ln x+2x^2\bullet\dfrac{1}{x}$，令 $x=1$ 得 $f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=0+2$

因此 $f_1'(1,1)=0; f_2'(1,1)=1$，所以 $df(1,1)=dy$，答案选 C.

（3）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则　　　　（　　）

$(A)\ a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　$(B)\ a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

$(C)\ a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　$(D)\ a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

【答案】A

【解析】根据麦克劳林公式有：

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\bullet[1-x^2+o(x^3)]=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\ ,$$

故 $a=1,b=0,c=-\frac{7}{6}$，正确答案为 A.

（4）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$ （ ）

$(A)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$ $(B)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

$(C)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$ $(D)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

【答案】B

【解析】由定积分的定义可知，将 $[0,1]$ n 等分，取中间点的函数值做小矩形的高，则：

$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$，故选 B.

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（ ）

$(A)\ 2,0$ $(B)\ 1,1$ $(C)\ 2,1$ $(D)\ 1,2$

【答案】B

【解析】$f(x_1+x_2+x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$

$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_3^2+2x_1x_3-x_1^2$ $=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

二次型对应矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-\lambda-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3),$$

则 $p=1,q=1$.故选 B.

（6）已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k\beta_1,\beta_3=\alpha_3-l_1\beta_1-l_2\beta_2$，若 β_1,β_2,β_3 两两正交，则 l_1,l_2 依次为 （ ）

$(A)\ \frac{5}{2},\frac{1}{2}.$ $(B)\ -\frac{5}{2},\frac{1}{2}.$ $(C)\ \frac{5}{2},-\frac{1}{2}.$ $(D)\ -\frac{5}{2},-\frac{1}{2}.$

【答案】A

【解析】利用斯密特正交化方法知：

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\ \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

于是，$k=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=\frac{2}{2}=1,\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}.$

所以，$l_1=\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=\frac{5}{2},l_2=\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

因此，选项 A 正确.

（7）设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，下列不成立的是　　（　）

(A) $r\begin{pmatrix}A&0\\0&AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$.　　(B) $r\begin{pmatrix}A&AB\\0&A^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

(C) $r\begin{pmatrix}A&BA\\0&AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$.　　(D) $r\begin{pmatrix}A&0\\BA&A^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

【答案】C

【解析】根据题设，对于选项 A，由于 $r\begin{pmatrix}A&0\\0&AA^T\end{pmatrix}=r(A)+r(AA^T)=2r(A)$，故 A 为真命题；

对于选项 B，由于 AB 的列向量可由 A 的列向量线性表出，故由

$r\begin{pmatrix}A&AB\\0&A^T\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&0\\0&A^T\end{pmatrix}=r(A)+r(A^T)=2r(A)$，故 B 为真命题；

对于选项 C，若 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 则 $BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, 且 $r(A)=1$,

但 $r\begin{pmatrix}A&BA\\0&AA^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=3\neq 2r(A)$，故选项 C 为假命题；

对于选项 D，由于 BA 的行向量可由 A 的行向量线性表示，故由

$r\begin{pmatrix}A&0\\BA&A^T\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&0\\0&A^T\end{pmatrix}=r(A)+r(A^T)=2r(A)$，

故 D 为真命题.

综上所述，选项 C 为正确选项.

（8）设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1,$ 下列为假命题的是　　（　）

(A) 若 $P(A|B)=P(A)$, 则 $P\left(A\middle|\overline{B}\right)=P(A)$.　　(B) 若 $P(A|B)>P(A)$, 则 $P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)>P(A)$.

(C) 若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$, 则 $P\left(A\middle|B\right)>P(A)$　(D) 若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$, 则 $P\left(A\right)>P(B)$.

【答案】D

【解析】A 选项，由条件可知，A,B 独立，则结论显然成立；

B 选项：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)\Rightarrow P(AB)>P(A)P(B)$

$P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}>\dfrac{1-P(B)+P(A)[P(B)-1]}{1-P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})$,

故 B 正确；

C 选项：由 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，利用条件概率公式易得 $P(AB)>P(A)P(B)$,

所以 $P\left(A\middle|B\right)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$，故 C 正确；

D 选项：$P(\overline{A}|A\cup B)=\dfrac{P[\overline{A}(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$，$P(A)>P(B)-P(AB)$，

不能说明 $P(A)>P(B)$，错误.故选 D.

（9）设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则　　　　（　　）

(A) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　(B) $E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　(D) $E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

【答案】B

【解析】$E(\hat{\theta})=\mathrm{E}(\overline{X}-\overline{Y})=\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2$,

$D(\hat{\theta})=\mathrm{D}(\overline{X}-\overline{Y})=\mathrm{D}(\overline{\mathrm{X}})-D(\overline{Y})-2Cov(\overline{X},\overline{Y})=\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}-\dfrac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（10）设 $X_1,X_2\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\le 10,H_1:\mu>10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\overline{X}\ge 11\}$, 其中

$\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为　（　）

$(A)\ 1-\Phi(0.5)$.　$(B)\ 1-\Phi(1)$.　$(C)\ 1-\Phi(1.5)$.　$(D)\ 1-\Phi(2)$.

【答案】B

【解析】所求概率为 $P\{\overline{X}<11\},\overline{X}\sim N(11.5,\frac{1}{4}),$

$$P\{\overline{X}<11\}=P\left\{\frac{\overline{X}-11.5}{\frac{1}{2}}\le\frac{11-11.5}{\frac{1}{2}}\right\}=1-\Phi(1),$$

故本题选 B.

二、填空题：11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$________.

【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

（12）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2e^t+t+1, & x<0\\ y=4(t-1)e^t+t^2, & x\ge 0\end{cases}$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】由 $\frac{dy}{dx}=\frac{4te^t+2t}{2e^t+1}$，得 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=\frac{(4e^t+4te^t+2)(2e^t+1)-(4te^t+2t)2e^t}{(2e^t+1)^3}\Big|_{t=0}=\frac{2}{3}$.

（13）欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的解为 $y=$________.

【答案】x^2

【解析】令 $x=e^t$，则 $xy'=\frac{dy}{dt},x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},$ 原方程化为 $\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0$，

特征方程为 $r^2-4=0,$ 则特征值为 $r_1=2,r_2=-2$，于是：

该线性齐次方程的通解为 $y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+C_2x^{-2}$，将初始条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 代入得：

$C_1=1,C_2=0$，故满足条件的特解为 $y=x^2$.

（14）设 Σ 为空间区域 $\left\{(x,y,z)\middle| x^2+4y^2\le 4, 0\le z\le 2\right\}$ 表面的外侧，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$ ________.

【答案】4π .

【解析】由高斯公式得 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+1)dv$

$$=\int_0^2 dz\iint\limits_{D} dxdy=4\pi\ .$$

（15）设 $A=a_{ij}$ 为 3 阶矩阵，A_{ij} 为代数余子式，若 A 的每行元素之和均为 2，且 $|A|=3,$ 则

$A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ________.

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】由 A 的每行元素之和均为 2 得：$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$ 所以，由特征值、特征向量的定义可知，

$A\alpha=\lambda\alpha,\lambda=2,\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.又因为 $A^*=|A|A^{-1}$，则 A^* 的特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$，对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$，而 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$, $A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}+A_{21}+A_{31}\\A_{12}+A_{22}+A_{32}\\A_{13}+A_{23}+A_{33}\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即

$A_{11}+A_{21}+A_{31}=\frac{3}{2}$.

（16）甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X,Y 的相关系数为：______.

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】联合分布率 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)&(0,1)&(1,0)&(1,1)\\\frac{3}{10}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}$，$X\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$E(XY)=\frac{3}{10},E(X)=\frac{1}{2},E(Y)=\frac{1}{2},D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{4}$,

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{4},\rho=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题：17－22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) （本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1+\int_0^x e^{t^2}dt)-(e^x-1)}{(e^x-1)\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1+\int_0^x e^{t^2}dt)-(e^x-1)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(1+\int_0^x e^{t^2}dt)+\sin x\bullet e^{x^2}-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1+\cos x\int_0^x e^{t^2}dt+\sin x\bullet e^{x^2}+1-e^x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\int_0^x e^{t^2}dt}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\bullet e^{x^2}}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^x}{2x}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

(18) （本题满分 12 分）

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)},(n=1,2,\cdots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【答案】$S(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in(0,1)\\ \dfrac{e}{e-1}, & x=1\end{cases}$

【解析】$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[e^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]$，收敛域 $(0,1]$，$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}},\ x\in(0,1]$，

$S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=-x\ln(1-x)-[-\ln(1-x)-x]$

$=(1-x)\ln(1-x)+x,x\in(0,1)$，$S_2(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S_2(x)=1$

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}+(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in(0,1)\\ \dfrac{e}{e-1}, & x=1\end{cases}.$$

（19）（本题满分 12 分）

已知曲线 C ：$\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值.

【答案】66

【解析】设拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$ ，

$L'_x(x,y,z,\lambda,\mu)=2x\lambda+4\mu=0$

$L'_y(x,y,z,\lambda,\mu)=4y\lambda+2\mu=0$

$L'_z(x,y,z,\lambda,\mu)=2z-\lambda+\mu=0$

$x^2+2y^2-z=6$

$4x+2y+z=30$

解得驻点为：$(4,1,12),(-8,-2,66)$ ，C 上的点 $(-8,-2,66)$ 到 xoy 坐标面距离的最大为 66.

（20）（本题满分 12 分）

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1.

(1)求 $I(D_1)$ 的值；(2)计算 $\int\limits_{\partial D_1}\dfrac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的边界.

【答案】（1） 8π；（2） $-\pi$

【解析】（1）根据二重积分的几何意义可知，当被积函数 $4-x^2-y^2$ 在区域 D 上大于零时：

$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 可以达到最大值.故：

$D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$ 且 $I(D_1)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr=8\pi.$

（2）补曲线 $D_2:x^2+4y^2=r^2$，（其中 r 为很小的正数），取 D_2 的方向为顺时针方向，则

$$\int\limits_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$=\int_{\partial D_1+\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}-\int_{\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$$

$$=0-\frac{1}{r^2}e^{r^2}\int_{\partial D_2}xdx+4ydy-\frac{1}{r^2}e^{r^2}\int_{\partial D_2}ydx-xdy=\frac{1}{r^2}\iint_{D_2}-2d\sigma=-\pi.$$

(21) （本题满分 12 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & -1\\ 1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{pmatrix}$

（1）求正交矩阵 P，使 P^TAP 为对角矩阵.（2）求正定矩阵 C，使 $C^2=(a+3)E-A$，E 为 3 阶单位矩阵.

【答案】(1) $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$;(2) $C=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

【解析】根据题设，由 $\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}a-\lambda & 1 & -1\\ 1 & a-\lambda & -1\\ -1 & -1 & a-\lambda\end{vmatrix}=(a-1-\lambda)^2(a+2-\lambda)=0$

可得，$\lambda_1=a+2,\lambda_{2,3}=a-1$；

由 $[A-(a+2)E]x=0$ 可得，A 属于特征值 $a+2$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

由 $[A-(a-1)E]x=0$ 可得，A 属于特征值 $a-1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$；

（注：此处也可选 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 P 也会相应不同.）

令：$P=\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|},\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 则 $P^TAP=\begin{pmatrix}a+2 & & \\ & a-1 & \\ & & a-1\end{pmatrix}$

（2）$P^TC^2P=P^T((a+3)E-A)P=(a+3)E-\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix}$，由于 C 为正定矩阵，正定矩阵为实对称矩阵，故 $C^2=CC^T=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix}P^T=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}P^T$

$$=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\left(P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}\right)^T$$

所以：$C=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为 X，较长一段的长度记为 Y，令 $Z=\frac{Y}{X}$.

（1）求 X 的概率密度；

（2）求 Z 的概率密度；

（3）求 $E(\frac{X}{Y})$.

【答案】(1) $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\ 0 & else\end{cases}$；(2) $f_z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z>1,\\ 0 & else\end{cases}$；(3) $2\ln 2-1$

【解析】(1) 由题意得，$X\sim U(0,1), f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1,\\ 0 & else\end{cases}$.

⑵ $Z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{2-X}{X}=\dfrac{2}{X}-1$,当 $z<1$ 时，$F_z(z)=0$；

当 $z\ge 1$ 时，$F_z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\dfrac{2}{X}-1\le z\}=P\left\{X\ge \dfrac{2}{z+1}\right\}=\int_{\frac{2}{z+1}}^{2}1dx=2-\dfrac{2}{z+1}$，

故 $f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z>1,\\ 0 & else\end{cases}$.

⑶ $E(\dfrac{X}{Y})=E(\dfrac{1}{Z})=\int_1^{+\infty}\dfrac{2}{(z+1)^2 z}dz=2\int_1^{+\infty}\left(-\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{(z+1)^2}+\dfrac{1}{z}\right)dz=2\ln 2-1$.