

河南省 2021 年普通高等学校

专科毕业生进入本科阶段学习考试

高等数学

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 值	50	30	50	14	6	150

注意事项:

答题前, 考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

本卷的试题答案必须答在答题卡上, 答在试卷上无效。

一、选择题 (每小题 2 分, 共 50 分)

在每小题的四个备选答案中选出一个正确答案, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。

1. 对称区间上 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 下列函数是奇函数的是A. $f(x^4)$ B. $g(x) + f(x)$ C. $g(x)f(x)$ D. $-g(-x)$ 2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} =$ A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 0 D. ∞ 3. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 下列变量不是无穷大量的是A. $\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^3+4}}$ B. $\lg x$ C. 3^x D. $\arctan x$ 4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的A. 无穷间断点 B. 可去间断点
C. 跳跃间断点 D. 振荡间断点5. 设函数 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) =$ A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. ∞ 6. 下列关于函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的命题中不正确的是

A. 可导必连续 B. 可微必可导 C. 可导必可微 D. 连续必可导

7. 设函数 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, 则 $f^{(n)}(x) =$ A. a_n B. $n!$ C. 0 D. $n!a_n$ 8. 设 $f(x) = \ln \sqrt{1+x}$, 则 $f'(1) =$ A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$ 9. 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 且极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = 3$, 则 $f'(1) =$ A. 2 B. 3
C. 6 D. 1210. 曲线 $y = x^3(x-4)$ 在区间 $(-\infty, -4)$ 内的性质是A. 单调减少, 凸的 B. 单调减少, 凹的
C. 单调增加, 凸的 D. 单调增加, 凹的

11. 下列等式中正确的是

A. $\int_{-1}^1 2dx = 2$ B. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
C. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ D. $\int_{-1}^1 (\sin x + \cos x) dx = 0$ 12. 已知 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int \frac{1}{x} f(\ln x) dx =$ A. $F(\ln x)$ B. $F(\ln x) + C$
C. $xF(\ln x) + C$ D. $\frac{1}{x} F(\ln x) + C$

13. 下列等式正确的是

A. $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$

B. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x)$

C. $\frac{d}{dx} \int f'(x) dx = f(x)$

D. $\int f'(x) dx = f(x)$

14. 平面 $2x + y - 3 = 0$ 的位置关系是

A. 平行于 xOy 面

B. 平行于 z 轴, 但不通过 z 轴

C. 垂直于 z 轴

D. 通过 z 轴

15. 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 表示的曲面是

A. 椭圆抛物面

B. 椭圆锥面

C. 椭球面

D. 椭圆柱面

16. 下列广义积分中发散的是

A. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x}$

B. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

C. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

D. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

17. 常数 $a > 0$, $\int_{-a}^a (x^2 - x\sqrt{a^2 - x^2}) dx =$

A. 0

B. a^3

C. $\frac{3}{2}a^3$

D. $\frac{2}{3}a^3$

18. 下列方程中为一阶线性微分方程的是

A. $(y + xy')^2 = xy'$

B. $xy' + (y')^2 + y = 0$

C. $x^2 y' + y = x$

D. $y'' - 2y' + y = 0$

19. 已知 $y_1 = 2x$ 是 $y'' + y = 2x$ 的解, $y_2 = e^{-x}$ 是 $y'' + y = 2e^{-x}$ 的解, 则微分方程

$y'' + y = 2x + 2e^{-x}$ 的通解为

A. $2x + e^{-x}$

B. $C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x + e^{-x}$

C. $C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{-x}$

D. $C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x$

20. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有一阶与二阶偏导数且取极小值, 则

A. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

B. 若 (x_0, y_0) 是 D 内唯一极值点, 则必为最小值点

C. $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$, 且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

D. $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$, 且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$

21. 设 $z = x^2 - 2xy - y^2$, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,2)} =$

A. 1

B. 2

C. -2

D. -1

22. 函数 $f(x, y) = 2xy$ 在点 $(-1, 2)$ 处沿方向 $\vec{l} = (2, -1)$ 方向的变化率为

A. $2\sqrt{5}$

B. -10

C. $-2\sqrt{5}$

D. 10

23. 二次积分 $\int_0^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$ 交换积分次序后是

A. $\int_0^3 dx \int_{3-x}^3 f(x, y) dy$

B. $\int_0^3 dx \int_0^3 f(x, y) dy$

C. $\int_0^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$

D. $\int_0^{3-y} dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$

24. 下列级数中绝对收敛的是

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{(n+1)(n+3)}$

25. 下列说法正确的是

- A. 一个收敛的级数添加有限项后仍收敛, 且其和不变
- B. 一个发散的级数减少有限项后可能收敛
- C. 一个收敛的级数加上另外一个发散的级数一定收敛
- D. 一个收敛的级数减去另外一个发散的级数一定发散

二、填空题 (每小题 2 分, 共 30 分)

26. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \ln(x+1)$ 的连续区间是_____.

27. 若 $f(x)$ 是可导的奇函数, 且 $f'(2) = 3$, 则 $f'(-2) =$ _____.

28. 曲线 $y = \ln x$ 在点_____处切线与连接曲线上两点 $(1,0)$, $(e,1)$ 的弦平行.

29. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+2021} =$ _____.

30. 曲线 $y = \frac{2x^2+1}{x-1}$ 的垂直渐近线是_____.

31. 设曲线方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta + \sin 2\theta \\ y = 2\sin\theta + \cos 2\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=0} =$ _____.

32. 不定积分 $\int x \sin x dx =$ _____.

33. $\int_0^2 \max\{x, 2-x\} dx =$ _____.

34. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt (x > 0) =$ _____.

35. 函数 $y = 4e^x + e^{-x}$ 的极值点坐标是_____.

36. 曲面 $e^z - 5z + xy = 3$, 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程是_____.

37. 设二元函数 $z = 2xy + y^2$, 则 $dz|_{(3,1)} =$ _____.

38. 函数 $y = \ln \sin x$ 在闭区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上满足罗尔定理的 ξ 的值

是_____.

39. 若 L 为正向圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 4$, 则

$\oint_L (2y + x^3) dx + (x - y^3) dy =$ _____.

40. 将函数 $f(x) = \frac{4}{x^2 - 6x + 5}$ 展开成 x 的幂级数为_____.

三、计算题 (每小题 5 分, 共 50 分)

41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x \sin x)}{1 - \cos x}$.

42. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - ax + b \right) = 0$, 求 a 和 b 的值.

43. 设函数 $y = \arctan \sqrt{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

44. 求曲线 $y = 3 + \ln(x^2 + 1)$ 的凹凸区间与拐点.

45. 计算不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+1} dx$.

46. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^2 f(x-1) dx$.

47. 求过点 $(-3, -2, 0)$ 且与直线 $L: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

48. 设二元函数 $z = \frac{x^2}{3y} + \arcsin(xy)$, 求 $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

49. 计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x$, $y = 0$, $x = 3$ 围成.

50. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{5^n \cdot n!}$ 的收敛性.

四、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

51. 过坐标原点作曲线 $y = e^{-x}$ 的切线. 求

（1）该切线的方程；

（2）由曲线、切线及 y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

52. 质量为 1g 的质点受外力作用作直线运动，该外力和时间成正比，和质点运动速度成反比. 在 $t = 10\text{s}$ 时，速度 $v = 100\text{cm/s}$ ，外力 $F = 2\text{g} \cdot \text{cm/s}^2$ ，问 $t = 30\text{s}$ 时，质点的速度是多少？（ $\sqrt{65} \approx 8.062$ ，计算结果取整数，注： $F = ma$ ， a 为加速度）.

五、证明题（共 6 分）

53. 证明多项式 $f(x) = 2x^3 - 6x + a$ 在区间 $[-1, 1]$ 上至多有一个零点，其中 a 为任意常数.