第一篇 最新真题

绝密★启用前

2023年全国硕士研究生招生考试

数 学（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整，笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡、试题册和草稿纸按规定交回。

考生编号	
考生姓名	

一、选择题(1～10小题,每小题5分,共50分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.)

(1) 曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为

(A) $y=x+\mathrm{e}$.　　(B) $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(C) $y=x$.　　(D) $y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为

(A) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0.\end{cases}$

(3) 已知 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 满足:$x_1=y_1=\dfrac{1}{2}$,$x_{n+1}=\sin x_n$,$y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots)$,则当 $n\to\infty$ 时,

(A) x_n 是 y_n 的高阶无穷小.　　(B) y_n 是 x_n 的高阶无穷小.

(C) x_n 与 y_n 是等价无穷小.　　(D) x_n 与 y_n 是同阶但不等价的无穷小.

(4) 若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,则

(A) $a<0,b>0$.　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a=0,b>0$.　　(D) $a=0,b<0$.

(5) 设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定,则

(A) $f(x)$ 连续,$f'(0)$ 不存在.　　(B) $f'(0)$ 存在,$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(C) $f'(x)$ 连续,$f''(0)$ 不存在.　　(D) $f''(0)$ 存在,$f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(6) 若函数 $f(\alpha)=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值,则 $\alpha_0=$

(A) $-\dfrac{1}{\ln(\ln 2)}$.　　(B) $-\ln(\ln 2)$.　　(C) $\dfrac{1}{\ln 2}$.　　(D) $\ln 2$.

(7) 设函数 $f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$.若 $f(x)$ 没有极值点,但曲线 $y=f(x)$ 有拐点,则 a 的取值范围是

(A) $[0,1)$.　　(B) $[1,+\infty)$.　　(C) $[1,2)$.　　(D) $[2,+\infty)$.

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{M}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的伴随矩阵,则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^* =$

(A) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.

(9) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$ 的规范形为

(A) $y_1^2+y_2^2$.　　(B) $y_1^2-y_2^2$.

(C) $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$.　　(D) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(10) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示,则 $\boldsymbol{\gamma}=$

(A) $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.　(B) $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.　(C) $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.　(D) $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in\mathbf{R}$.

二、填空题(11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分.)

(11) 当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小,则 $ab=$ ______.

(12) 曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$ 的弧长为______.

(13) 设函数 $z=z(x,y)$ 由 $e^z+xz=2x-y$ 确定,则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$ ______.

(14) 曲线 $3x^3=y^5+2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为______.

(15) 设连续函数 $f(x)$ 满足:$f(x+2)-f(x)=x$,$\int_0^2 f(x)dx=0$,则 $\int_1^3 f(x)dx=$ ______.

(16) 已知线性方程组 $\begin{cases}ax_1 \quad\quad +x_3=1,\\ x_1+ax_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ ax_1+bx_2 \quad\quad =2\end{cases}$ 有解,其中 a,b 为常数. 若 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$,则 $\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$ ______.

三、解答题(17 ~ 22 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

设曲线 $L:y=y(x)(x>e)$ 经过点 $(e^2,0)$,L 上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(Ⅰ) 求 $y(x)$;

(Ⅱ) 在 L 上求一点,使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小,并求此最小面积.

(18)(本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = xe^{\cos y} + \frac{x^2}{2}$ 的极值.

(19)(本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geqslant 1\right\}$.

(Ⅰ)求 D 的面积;

(Ⅱ)求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

(20)(本题满分 12 分)

设平面有界区域 D 位于第一象限,由曲线 $x^2+y^2-xy=1, x^2+y^2-xy=2$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$, $y=0$ 围成,计算 $\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(21)(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数.证明:

(Ⅰ)若 $f(0)=0$,则存在 $\xi \in (-a,a)$,使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值,则存在 $\eta \in (-a,a)$,使得 $|f''(\eta)| \geqslant \frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(22)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足:对任意 x_1, x_2, x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ 2x_1-x_2+x_3 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.