

第一篇 最新真题

绝密 ★ 启用前

2023 年全国硕士研究生招生考试

数学(一)

(科目代码:301)

考生注意事项

1. 答题前,考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名;在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号,并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上,非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写,字迹工整,笔迹清楚;涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束,将答题卡、试题册和草稿纸按规定交回。

[illegible]

公众号【语听颖想】

一、选择题(1~10小题,每小题5分,共50分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是最符合题目要求的.)

(1) 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x-1} \right)$ 的斜渐近线方程为

(A) $y = x + e$.

(B) $y = x + \frac{1}{e}$.

(C) $y = x$.

(D) $y = x - \frac{1}{e}$.

(2) 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界,则

(A) $a < 0, b > 0$.

(B) $a > 0, b > 0$.

(C) $a = 0, b > 0$.

(D) $a = 0, b < 0$.

(3) 已知 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定,则

(A) $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在.

(B) $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

(C) $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在.

(D) $f''(0)$ 存在, $f''(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

(4) 已知 $a_n < b_n (n = 1, 2, \dots)$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛,则“ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛”是“ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛”的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分不必要条件.

(C) 必要不充分条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

(5) 已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$ 的

秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则

(A) $r_1 \leq r_2 \leq r_3$.

(B) $r_1 \leq r_3 \leq r_2$.

(C) $r_3 \leq r_1 \leq r_2$.

(D) $r_2 \leq r_1 \leq r_3$.

(6) 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(7) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示,也可由 β_1, β_2

线性表示,则 $\gamma =$

(A) $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

(B) $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

(C) $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

(D) $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

(8) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X - EX|) =$

- (A) $\frac{1}{e}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{2}{e}$. (D) 1.

(9) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 为来自总体 $N(\mu_2, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本, 且两样本相互独立. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$, 则

- (A) $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$. (B) $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$.
(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$. (D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$.

(10) 设 X_1, X_2 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 $\sigma (\sigma > 0)$ 是未知参数. 若 $\hat{\sigma} = a |X_1 - X_2|$ 为 σ 的无偏估计, 则 $a =$

- (A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$. (C) $\sqrt{\pi}$. (D) $\sqrt{2\pi}$.

二、填空题(11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.)

(11) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab =$ _____.

(12) 曲面 $z = x + 2y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面方程为 _____.

(13) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 1 - x, x \in [0, 1]$. 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} =$ _____.

(14) 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) - f(x) = x, \int_0^2 f(x) dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x) dx =$ _____.

(15) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$. 若 $\gamma^T \alpha_i = \beta^T \alpha_i (i = 1, 2, 3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 =$ _____.

(16) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B\left(1, \frac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 则 $P\{X = Y\} =$ _____.

三、解答题(17 ~ 22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

设曲线 $y = y(x) (x > 0)$ 经过点 $(1, 2)$, 该曲线上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t) dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 的极值.

(19) (本题满分 12 分)

设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0$ 和 $x + z = 1$ 围成, Σ 为 Ω 边界面的外侧, 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} 2xz \, dydz + xz \cos y \, dzdx + 3yz \sin x \, dx dy.$$

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续导数. 证明:

(I) 若 $f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a) + f(-a)]$;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$, 使得 $|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2} |f(a) - f(-a)|$.

(21) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$, $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3$.

(I) 求可逆变换 $x = Py$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$;

(II) 是否存在正交变换 $x = Qy$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$?

(22) (本题满分 12 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(I) 求 X 与 Y 的协方差;

(II) X 与 Y 是否相互独立?

(III) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度.

公众号【语听颖想】